TEMA 3 – ÁLGEBRA

3.1 – FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

LA DIVISIBILIDAD EN LOS POLINOMIOS

Un polinomio P(x) es divisible por otro polinomio Q(x) cuando el cociente P(x):Q(x) es exacto. En tal caso, P(x) : Q(x) = C(x) y por tanto, P(x) se puede descomponer en producto de Q(x) por C(x). Es decir, P(x) = Q(x).C(x). Los polinomios Q(x) y C(x) se llaman **divisores** de P(x).

Un polinomio se dice que es **irreducible** cuando ningún polinomio de grado inferior es divisor suyo.

PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO

- Sacar factor común
- Si es de grado mayor o igual que tres: Regla de Ruffini (Probar con los divisores del término independiente)
- Si es de grado dos :
  - Recordar los productos notables: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
    $a^2 - 2ab + b^2 = (a – b)^2$
    $a^2 – b^2 = (a + b).(a – b)$
  - Resolver la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = a.(x – x_1).(x – x_2)$

3.2 – FRACCIONES ALGEBRAICAS

DEFINICIÓN

Se llama **fracción algebraica** al cociente de dos polinomios: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

SIMPLIFICACIÓN

Si el numerador y el denominador de una fracción algebraica se pueden dividir por un mismo polinomio, al hacerlo se simplifica la fracción.

Si dividimos numerador y denominar por su m.c.d se obtiene la **fracción irreducible.**

FRACCIONES EQUIVALENTES

Dos **fracciones** son **equivalentes** : $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{R(x)}{S(x)} \Leftrightarrow P(x).S(x) = Q(x).R(x)$

REDUCCIÓN A COMÚN DENOMINADOR

Si tenemos varias fracciones algebraicas, podemos obtener otras que, siendo respectivamente equivalentes a las primeras, tengan entre sí el mismo denominador. Se dice, entonces, que se han reducido a **denominador común**.

OPERACIONES CON FRACCIONES

Para **sumar(restar)** fracciones algebraicas, se reducen a común denominador (si no lo están ya) y se suman(restan) sus numeradores.

El **producto** de dos fracciones algebraicas es el producto de sus numeradores partido por el producto de sus denominadores.

La fracción inversa de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es $\frac{Q(x)}{P(x)}$ pues su producto es 1.

El **cociente** de dos fracciones algebraicas es igual al producto de la primera por la inversa de la segunda.

3.3 – RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. NÚMERO DE SOLUCIONES

Una ecuación de segundo grado es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$

Número de soluciones: Llamamos discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ Dos soluciones distintas
- Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ Una solución doble
- Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ No tiene solución

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

- Completa: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Incompletas : Si $b = 0$ $ax^2 + c = 0$ Se despeja x^2 y luego se hace la raíz
  Si $c = 0$ $ax^2 + bx = 0$ Se saca factor común la x y luego cada uno de los productos se iguala a cero y se obtienen las soluciones.

ECUACIONS BICUADRÁTICAS $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Se hace un cambio de variable $x^2 = t$
Se resuelve la ecuación de segundo grado en t
Se calcula las x como la raíz de t

ECUACIONES CON RADICALES

Si sólo hay una raíz: Se aísla la raíz en un miembro de la ecuación y se elevan ambos miembros al cuadrado.

Si hay más de una raíz: Se aísla una raíz en un miembro de la ecuación y se elevan los dos miembros al cuadrado. Esto habrá que hacer tantas veces como raíces tenga.

Nota : Al elevar al cuadrado se duplican las soluciones, por tanto es necesario comprobar las soluciones en la ecuación inicial.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON “x” EN EL DENOMINADOR

Hacer común denominador
Eliminar denominadores
Resolver la ecuación lineal obtenida
Comprobar las soluciones

ECUACIONES DE GRADO MAYOR QUE DOS

Se factoriza (Utilizando sacar factor común, productos notables, ecuaciones de segundo grado, Ruffini) y luego se iguala cada factor a cero.

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

$$| x - a | = b \quad \begin{cases} x - a = b \\ x - a = -b \end{cases}$$

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ecuaciones exponenciales son aquellas en la que la incógnita está en el exponente.

- Si no hay sumas :
  - Si se pueden poner todos en función de la misma base : $a^x = a^y \Rightarrow x = y$
  - Si no se pueden poner todos en función de la misma base: Tomar logaritmos : $a^x = b \Rightarrow \log a^x = \log b \Rightarrow x.\log a = \log b \Rightarrow x = \dfrac{\log b}{\log a}$
  - Si hay sumas: Cambio de variable $a^x = t$
    Resolver la ecuación en t
    Calcular la x

Ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita está en una expresión afectada por un logaritmo.

Utilizar las propiedades de los logaritmos:

$k = \log_a a^k$ $\qquad$ $\log a^b = b.\log a$

$\log a + \log b = \log (a.b)$ $\qquad$ $\log a - \log b = \log (a/b)$

Comprobar las soluciones en la ecuación inicial teniendo el cuenta que el dominio de un logaritmo es $(0,+\infty)$ $\quad$ $[\ \log (f(x)) \Rightarrow f(x) > 0\ ]$

3.4 – SISTEMAS DE ECUACIONES

SOLUCIÓN

Una **solución** de una ecuación con varias incógnitas es un conjunto de valores (uno para cada incógnita) que hacen cierta la igualdad.

Las ecuaciones con más de una incógnita suelen tener infinitas soluciones

DEFINICIÓN DE UN SISTEMA

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones de las que pretendemos encontrar su solución (o soluciones) común.

RESOLVER UN SISTEMA

Para **resolver un sistema de ecuaciones** consiste en buscar una solución común a todas ellas.

METODOS TRADICIONALES: SUSTITUCIÓN, IGUALACIÓN Y REDUCCIÓN

- **Sustitución**: Despejar una incógnita de una ecuación y sustituir en la otra.

- **Reducción**: Multiplicar las ecuaciones por los números adecuados para que al sumarlas se vaya una incógnita.

- **Igualación**: Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones y se igualan.

3.5 – MÉTODO DE GAUSS PARA SISTEMAS LINEALES

El **método de Gauss** es una interesante generalización del método de reducción para sistemas lineales de más de dos ecuaciones e incógnitas.

SISTEMAS ESCALONADOS

Un **sistema escalonado** es un sistema de ecuaciones en la que en cada ecuación hay una incógnita menos:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ b'y + c'z &= d' \\ c''z &= d'' \end{aligned}$$

Se resuelven de abajo arriba: Primero la última ecuación, después la penúltima,..

MÉTODO DE GAUSS

Consiste en mediante operaciones elementales, sustituir una ecuación por una combinación lineal de otra, transformar un sistema en un sistema escalonado que es más sencillo de resolver.

El mismo camino puede hacerse operando sólo con el “esqueleto numérico” del sistema llamado **matriz del sistema**

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \end{array}\right) \approx \begin{cases} ax+by+cz=d \\ ey+fz=g \\ hz=i \end{cases}$$

Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ **Tiene una única solución** ($\exists!$ solución)

SISTEMAS INCOMPATIBLES (sin solución)

Si al aplicar el método de Gauss llegamos a una ecuación del tipo $0x + 0y + 0z = k$ ($k \neq 0$), entonces el sistema es Incompatible $\Rightarrow$ **No tiene solución**

SISTEMAS INDETERMINADOS (con infinitas soluciones)

Si al aplicar el método de Gauss llegamos a una ecuación del tipo $0x + 0y + 0z = 0$, se suprime. Si quedan menos ecuaciones que incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones. Se llama Sistema Compatible Indeterminado $\Rightarrow$ **Existen Infinitas soluciones**

3.7 – INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

DEFINICIÓN DE INECUACIÓN

Una inecuación es una desigualdad (<, ≤, >, ≥) entre expresiones algebraicas.

SOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN

Solución de una inecuación es un valor de x con el cual se cumple la desigualdad.

RESOLVER UNA INECUACIÓN

Resolver una inecuación consiste en encontrar todas sus soluciones.
Habitualmente tiene infinitas, que se agrupan en intervalos de R.

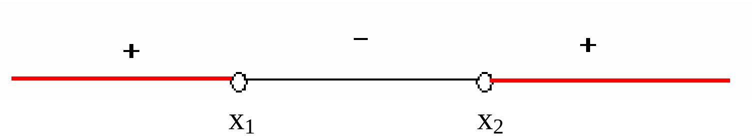
- **Inecuaciones lineales de primer grado**: (Se resuelven como una ecuación normal teniendo en cuenta que si se multiplica o divide por un número negativo la desigualdad cambia de signo)

$$ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b: \quad \text{Si } a > 0 \quad x > -b/a \Rightarrow x \in (-b/a, +\infty)$$
$$\text{Si } a < 0 \quad x < -b/a \Rightarrow x \in (-\infty, -b/a)$$

- **Inecuaciones lineales de grado mayor o igual que dos**

  Se igualan a cero y se resuelve la ecuación. Estas soluciones dividen la recta real en partes. Tomando un número en cada parte se comprueba si cumplen la inecuación o no. Si la cumplen, todo ese intervalo es solución.

$$ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$$

Si la desigualdad contiene el igual los puntos se pintan y se cogen los extremos.

- **Inecuaciones con cocientes**

  Se igualan a cero, por separado, numerador y denominador y se resuelve las ecuaciones.
  - Los puntos del numerador se incluyen si en la desigualdad está el igual.
  - Los puntos del denominador nunca se incluyen (no se puede dividir por cero).

  Estas soluciones dividen la recta real en partes. Tomando un número en cada parte se comprueba si cumplen la inecuación o no. Si la cumplen todo ese intervalo es solución.

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE INECUACIONES

Solución de un sistema de inecuaciones es una solución común a todas las inecuaciones que lo forman.

RESOLVER UN SISTEMA DE INECUACIONES

Resolver un sistema de inecuaciones consiste en encontrar todas sus soluciones.

Se resuelven por separado cada inecuación del sistema y luego se halla la intersección de las soluciones, es decir, las que cumplen todas las ecuaciones a la vez.