Apuntes de ecuaciones diferenciales

Jose S. Cánovas Peña

7 de mayo de 2004

Índice General

Capítulo 1

Introducción a las ecuaciones diferenciales

Sumario. Definición de ecuación diferencial. Orden de una ecuación diferencial. Solución de una ecuación diferencial. Ecuaciones resueltas respecto a la derivada mayor. Familias paramétricas de soluciones. Problemas de condiciones iniciales.

1.1 Ecuaciones diferenciales

Una *ecuación diferencial* una expresión de la forma

$$F(x, y, y', ..., y^{n)}) = 0, \tag{1.1}$$

donde F es una función real definida en un cierto abierto $A \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, e $y(x)$ es una función real de variable real. Como vemos, una ecuación diferencial es una expresión en la que aparecen ligadas una variable x, que llamaremos *variable independiente* y las n primeras derivadas respecto de x de una variable y, que se llama *variable dependiente* por ser una función dependiente de la variable x. Se llama *orden* de la ecuación (1.1) al valor de la derivada más alta en dicha expresión. Ejemplos de ecuaciones diferenciales son los siguientes:

$$y'' + \log(xy) - x = y,$$

$$y^{3)} + xy' + e^x \sinh y = 0,$$

$$y \cdot y' \cdot y'' = x,$$

que tienen órdenes 2, 3 y 2, respectivamente.

Diremos que una función $y : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *solución* de la ecuación (1.1) si existe la derivada n–ésima de y en todo punto del intervalo (a, b), $(x, y(x), y'(x), ..., y^{n)}(x)) \in A$ para todo $x \in (a, b)$ y

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{n)}(x)) = 0$$

para todo $x \in (a, b)$. Por ejemplo tomemos la ecuación diferencial de orden uno

$$y' - y \tan x = 0. \tag{1.2}$$

Esta ecuación viene definida por la función $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, y') = y' - y \tan x$. El dominio de definición de F es en este caso $A = \{(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \times \mathbb{R}^2$. Entonces la función $y : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ dada por $y(x) = \frac{c}{\cos x}$, donde c es una constante arbitraria es una solución de dicha ecuación diferencial. En efecto, esta función es una vez derivable con derivada $y'(x) = \frac{c \sin x}{\cos^2 x}$, se verifica que $(x, y(x), y'(x)) \in A$ para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, y además satisface que

$$y'(x) - y(x) \tan x = \frac{c \sin x}{\cos^2 x} - \frac{c}{\cos x} \tan x = 0,$$

para todo punto $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Con frecuencia las soluciones de la ecuación (1.1) no podrán obtenerse de forma explícita y vendrán dadas de forma ímplicita por una ecuación de la forma $g(x, y) = 0$. Así las curvas $x^2 + y^2 = c > 0$ definen implícitamente las soluciones de la ecuación $yy' + x = 0$ definidas en $(-\sqrt{c}, \sqrt{c})$, como puede verse fácilmente derivando de forma implícita la expresión $x^2 + y^2 = c$ respecto a la variable independiente x.

A lo largo del curso estudiaremos fundamentalmente *ecuaciones resueltas respecto de la derivada de mayor orden* de la ecuación, es decir, ecuaciones de la forma

$$y^{n)} = f(x, y, y', ..., y^{n-1)}),$$

donde $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Estas ecuaciones son obtenidas cuando sea posible despejar $y^{n)}$ en (1.1). Serán también de especial interés para nosotros las ecuaciones *autónomas*, de la forma

$$F(y, y', ..., y^{n)}) = 0,$$

donde F no depende de la variable independiente y las ecuaciones *lineales*

$$a_0(x)y^{n)} + a_1(x)y^{n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

con $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ y b funciones reales de variable real.

Las anteriores definiciones se extienden de manera natural al contexto de los *sistemas de ecuaciones diferenciales*, es decir, sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{n)}, y_2, y_2', ..., y_2^{n)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{n)}) = 0; \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{n)}, y_2, y_2', ..., y_2^{n)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{n)}) = 0; \\ \vdots \\ F_k(x, y_1, y_1', ..., y_1^{n)}, y_2, y_2', ..., y_2^{n)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{n)}) = 0; \end{array} \right.$$

donde $y_1, y_2, ..., y_m$ son funciones reales a determinar que dependen de x. Se suele suponer que hay igual número de ecuaciones que de incógnitas $(k = m)$ de manera que todas las ecuaciones son independientes, es decir, ninguna puede deducirse de las demás. En el Tema 4 se encuentran definidas con precisión los conceptos relativos a sistemas de ecuaciones diferenciales.

1.2 Soluciones de ecuaciones diferenciales

Como vimos en el ejemplo (1.2) las soluciones de una ecuación diferencial en caso de existir no son únicas, sino que dependen de ciertas constantes arbitrarias provenientes de la integración. En general, dada una ecuación diferencial de la forma

$$F(x,y,y',...,y^{n)})=0, \tag{1.3}$$

las soluciones de la misma pueden escribirse como

$$g(x,y,c_1,...,c_n)=0 \tag{1.4}$$

con $c_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,...,n$. Así las soluciones de una ecuación diferencial de orden uno generan una *familia n–paramétrica de curvas* en el plano. En el ejemplo anterior, la solución $y(x)=c/\cos x$ define una familia de curvas en el plano dependiente del valor o parámetro de c. Recíprocamente, a partir de una familia n–paramétrica de curvas definida por (1.4) puede construirse una ecuación diferencial de la manera siguiente. Derivando n veces (1.4) respecto de x obtenemos $n+1$ ecuaciones de las que, eliminando los parámetros $c_1,c_2,...,c_n$, obtendremos una ecuación diferencial de orden n dada por (1.3). Las soluciones obtenidas como familia n–paramétrica de curvas se llaman *soluciones generales* de la ecuación diferencial. Por ejemplo, si consideramos la familia de las curvas del plano dependiente de dos parámetros dada por la ecuación $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, derivando implícitamente respecto de x tenemos que

$$y' = c_1e^x - c_2e^{-x},$$
$$y'' = c_1e^x + c_2e^{-x}.$$

Despejando c_1 y c_2 y sustituyendo en la primera ecuación tenemos que $y''=y$ es la ecuación diferencial que define a la familia de curva anteriores. Nótese que es una ecuación de orden dos dado que la familia depende de dos parámetros.

Sin embargo, no siempre es posible la situación anterior. Por ejemplo, la ecuación $y^2+(y')^2=-1$ no posee ninguna solución, mientras que $y^2+(y')^2=0$ tiene como única solución $y(x)=0$, que no depende de parámetro alguno. Además la ecuación de orden uno $(y'-y)(y'-2y)=0$ tiene por soluciones a las funciones dadas por la expresión $(y-c_1e^t)(y-c_2e^{2t})=0$. Mención aparte merecen aquellas que no aparecen comprendidas en la familia n–paramétrica, las llamadas *soluciones singulares*. Por ejemplo $y'=-2y^{3/2}$ tiene como solución general $y(x)=1/(t+c)^2$ y como solución singular $y(x)=0$. Nótese que esta definición es ambigua y depende de la familia de curvas al ser $y(x)=C^2/(Cx+1)^2$ una familia uniparamétrica de soluciones de $y'=-2y^{3/2}$ conteniendo la solución nula.

1.3 Problemas de condiciones iniciales

De acuerdo con lo visto anteriormente, las soluciones de las ecuaciones diferenciales vienen dadas por una familia n–paramétrica de curvas y por lo tanto la solución no es en general única. Para evitar este hecho, suele acompañarse a una ecuación diferencial

$$F(x,y,y',...,y^{n)})=0$$

de n condiciones iniciales de la forma $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$,...,$y^{n-1)}(x_0) = y_0^{n-1)}$ donde las constantes $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{n-1)}$ son números reales, de manera que encontremos la solución de la ecuación diferencial satisfaga adicionalmente estas condiciones. Se define un *problema de condiciones iniciales o de Cauchy* al problema de la forma

$$\begin{cases} F(x, y, y', ..., y^{n)}) = 0; \\ y(x_0) = y_0; \\ y'(x_0) = y_0'; \\ \vdots \\ y^{n-1)}(x_0) = y_0^{n-1)}. \end{cases}$$

Lo que se espera añadiendo estas condiciones es eliminar los parámetros de la familia n–paramétrica de soluciones, obteniendo entonces una solución que sea única. Nótese que se añaden tantas condiciones iniciales como orden tiene la ecuación. Por ejemplo, tomemos la ecuación de orden uno (1.2), que recordemos, tenía por solución $y : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ dada por $y(x) = \frac{c}{\cos x}$, donde c es una constante arbitraria. Si consideramos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y' - y \tan x = 0 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

tendríamos que necesariamente $1 = y(0) = c/\cos(0) = c$, por lo que $c = 1$ y la única solución del problema de condiciones iniciales es $y(x) = 1/\cos x$.

Sin embargo esta estrategia no siempre produce los frutos deseados. Sin ir más lejos, el problema

$$\begin{cases} y^2 + (y')^2 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

no tiene solución y

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tiene al menos dos soluciones dadas por $y(x) = 0$ e $y(x) = x^3$. Se verá el la siguiente lección bajo qué condiciones los problemas de existencia y unicidad tienen asociados una única solución.

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales de orden uno

Sumario. Ecuación de variables separables. Ecuación lineal homogénea y no homogénea. Ecuaciones exactas. Factores integrantes. Problema de condiciones iniciales. Teorema de existencia y unicidad de soluciones.

En este tema vamos a aprender a resolver algunos tipos especiales de ecuaciones diferenciales de orden uno. Todas las ecuaciones que vamos a considerar dependen para su resolución de técnicas de integración estudiadas en la asignatura de cálculo, por lo que el cálculo de primitivas será crucial en este tema.

Por otra parte hay que destacar el siguiente hecho: dada una ecuación diferencial de orden uno al azar, es prácticamente seguro que no vamos a saber resolverla. Vamos a ver en este tema que por lo menos se puede garantizar que la solución existe. Garantizar la existencia de solución es importante ya que, una vez conocida que una ecuación tiene solución, pueden usarse métodos numéricos y cuantitativos para aproximar la solución, como se verá en la asignatura de cuarto curso métodos numéricos.

2.1 Ecuaciones diferenciales de variables separadas

Una ecuación de primer orden se dice que es de *variables separadas* si tiene la forma

$$y' = f(y)g(x)$$

donde f y g son dos funciones reales definidas sobre intervalos abiertos. Suponiendo que $f(y) \neq 0$ en el dominio de definición de f podemos transformar nuestra ecuación en la forma

$$\frac{y'}{f(y)} = g(x),$$

que nos proporciona una expresión de la ecuación con cada variable a un lado de la igualdad. Entonces, si somos capaces de calcular las primitivas

$$\int \frac{y'(x)}{f(y(x))}dx = \int g(x)dx,$$

tendremos resuelta la ecuación inicial. Por ejemplo, si consideramos la ecuación

$$y' = yx,$$

y seguimos el proceso anterior obtendremos que

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int x dx,$$

siempre que $y \neq 0$. Integrando

$$\log y(x) = k + x^2/2$$

y despejando $y(x)$ en la ecuación anterior se tiene que

$$y(x) = ce^{x^2/2}, \ c = e^k \in \mathbb{R}^+$$

es su solución general. Si lo que tenemos es el problema de condiciones iniciales

$$\left. \begin{array}{l} y' = yx \\ y(0) = 1, \end{array} \right\}$$

podemos calcular de forma única la constante c imponiendo la condición $y(0) = 1$ en la solución general, teniéndose que $y(0) = 1 = ce^0 = c$, con lo que $y(x) = e^{x^2/2}$ es la única solución de dicho problema.

Si $f(y_0) = 0$ para algún $y_0 \in \mathbb{R}$, entonces $y(x) = y_0$ es una solución de la ecuación diferencial que se llama *singular*. Por ejemplo, si hubiésemos querido resolver el problema de condiciones iniciales

$$\left. \begin{array}{l} y' = yx \\ y(0) = 0, \end{array} \right\}$$

tendríamos que $y(x) = 0$ es la única solución (singular) de dicha ecuación.

A veces las soluciones singulares se engloban dentro de la solución general, como en el ejemplo anterior donde si cogemos la solución general $y(x) = ce^{x^2/2}$ e imponemos la condición inicial $y(0) = 0$, obtenemos que $c = 0$ y por tanto $y(x) = 0$. Sin embargo, a veces las soluciones singulares no pueden englobarse dentro de la solución general como pone de manifiesto el siguiente ejemplo. Tomamos la ecuación

$$y' = y(1 - y),$$

que tiene por soluciones singulares (constantes) $y(x) = 0$ e $y(x) = 1$ y por solución general

$$y(x) = \frac{ce^x}{ce^x - 1}, \ c \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Haciendo $c = 0$ obtenemos la solución singular $y(x) = 0$, sin embargo, si imponemos la condición $y(0) = 1$ tenemos que

$$1 = \frac{c}{c - 1}$$

o lo que es lo mismo

$$c - 1 = c$$

con lo que

$$-1 = 0,$$

que es un absurdo, por lo que la solución singular $y(x) = 1$ no está englobada dentro de la solución general (2.1).

2.2 Ecuaciones diferenciales lineales

La *ecuación lineal de primer orden* es de la forma

$$f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x),$$

donde f_1, f_2 y g son funciones reales continuas en el definidas sobre un intervalo abierto (a, b). Si $f_1(x) \neq 0$ para todo elemento $x \in (a, b)$, podemos escribir la ecuación anterior de la forma

$$y' + p(x)y = q(x),$$

donde $p(x) = f_2(x)/f_1(x)$ y $q(x) = g(x)/f_1(x)$. Si $q(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ la ecuación se dice *homogénea*, y en caso contrario *no homogénea*.

Las soluciones de la ecuación lineal homogénea pueden calcularse fácilmente al ser ésta de variables separadas. En efecto, si consideramos la ecuación

$$y' + p(x)y = 0,$$

podemos reducirla a la forma

$$\frac{y'}{y} = -p(x),$$

y entonces

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = -\int p(x)dx.$$

Si $G(x)$ es una primitiva de $-p(x)$ tendremos

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \ln y(x) = G(x) + C,$$

y así

$$y(x) = Ke^{G(x)} \text{ donde } K \in \mathbb{R}.$$

Para calcular las soluciones de la ecuación lineal no homogénea procederemos por el *método de variación de constantes*. Dicho método permite calcular las soluciones de la ecuación no homogénea a partir de las soluciones de la homogénea. Supongamos la ecuación

$$y' + p(x)y = q(x),$$

y sea $y_h(x) = Ke^{G(x)}$ la solución de la ecuación homogénea calculada anteriormente. El método de variación de constantes se basa en suponer que las soluciones de la ecuación no homogénea son de la forma $y(x) = K(x)e^{G(x)}$, donde $K(x)$ es ahora una función arbitraria que suponemos derivable. Derivando esta expresión teniendo en cuenta que $G'(x) = -p(x)$ obtenemos

$$y'(x) = K'(x)e^{G(x)} - K(x)p(x)e^{G(x)}.$$

Suponiendo que $y(x)$ es solución de la ecuación lineal no homogénea y sustituyendo en dicha ecuación se tiene

$$K'(x)e^{G(x)} - p(x)K(x)e^{G(x)} + p(x)K(x)e^{G(x)} = q(x),$$

o lo que es lo mismo

$$K'(x) = q(x)e^{-G(x)}.$$

Así

$$K(x) = \int q(x)e^{-G(x)}dx = H(x) + C,$$

donde $H(x)$ es una primitiva de $q(x)e^{-G(x)}$. Por lo tanto, la solución de la ecuación no homogénea es de la forma

$$y(x) = Ce^{G(x)} + H(x)e^{G(x)}.$$

Por ejemplo consideremos la ecuación lineal $xy' + 2y = \sin x$. Dicha ecuación puede escribirse como

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x}.$$

La ecuación homogénea es de la forma $y' + \frac{2}{x}y = 0$, cuyas soluciones son de la forma $y_h(x) = K/x^2$. Procediendo por el método de variación de constantes obtenemos que

$$K(x) = \int x \sin x dx = \sin x - x\cos x + C,$$

de donde obtenemos que las soluciones de nuestra ecuación son

$$y(x) = \frac{1}{x^2}(\sin x - x\cos x + C).$$

Si consideramos el problema

$$\left.\begin{array}{l} y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x} \\ y(\pi/2) = 0 \end{array}\right\}$$

tendríamos utilizando el dato $y(\pi/2) = 0$ que

$$0 = y(\pi/2) = \frac{4}{\pi^2}(1 + C)$$

con lo que $C = -1$ y la función

$$y(x) = \frac{1}{x^2}(\sin x - x\cos x - 1)$$

es la única solución de dicho problema de condiciones iniciales.

Es importante en este punto hacer una reflexión. El alumno puede obtar por aprender las fórmulas anteriores de memoria y aplicarlas. Sin embargo, nosotros proponemos que se aprenda a resolver la ecuación a partir de las ideas que permiten obtener las fórmulas anteriores. Por ejemplo, vamos a resolver de nuevo la ecuación

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x}.$$

Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea, que será de variables separables. Consideramos así $y' + 2y/x = 0$, de donde

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x},$$

e integrando
$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = -\int \frac{2}{x}dx$$
obtenemos
$$\log y(x) = 2\log x + c = -\log x^2 + c,$$
de donde despejando
$$y(x) = \frac{k}{x^2},\ k = e^c.$$
Ahora obtenemos por el método de variación de constantes la solución de la ecuación no homogénea, para lo cual, según dicho método, hemos de proponer una solución de la forma $y(x) = k(x)/x^2$. Derivamos esta expresión, $y'(x) = k'(x)/x^2 - 2k(x)/x^3$, y sustituimos en la ecuación original teniendo
$$\frac{k'(x)}{x^2} - 2\frac{k(x)}{x^3} + \frac{2}{x}\frac{k(x)}{x^2} = \frac{\sin x}{x},$$
simplificando obtenemos
$$k'(x) = x\sin x$$
e integrando
$$k(x) = \int x\sin x dx = \sin x - x\cos x + C,$$
de donde obtenemos que las soluciones de nuestra ecuación son
$$y(x) = \frac{1}{x^2}(\sin x - x\cos x + C).$$
Como se ve, sólo hemos usado las ideas y no las fórmulas. Aconsejamos al alumno proceder de esta manera a la hora de resolver estas ecuaciones.

2.3 Ecuaciones diferenciales exactas

Consideremos una ecuación diferencial de primer orden de la forma $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones reales definidas sobre un dominio $(a,b)\times(c,d)\subset\mathbb{R}^2$ con $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Dicha ecuación puede llevarse a la forma $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$. Supongamos que existe una función derivable $f : (a,b)\times(c,d)\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de manera que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$. Entonces la ecuación $f(x,y) = C$, donde C es un número real, define a y como función implícita de forma que dicha función $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial anterior. En efecto, si calculamos
$$0 = \frac{dC}{dt} = \frac{d}{dx}f(x,y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))y'(x) = M(x,y(x)) + N(x,y(x))y'(x).$$

Recíprocamente, una ecuación $f(x,y) = C$ donde $f(x,y)$ es una función que supondremos de clase $C^1((a,b)\times(c,d))$, y que define de forma implícita una función $y(x)$ proporciona las soluciones de la ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$.

Definiremos las *ecuaciones diferenciales exactas* como aquellas de forma
$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

donde $M, N : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ son funciones de clase $C^0((a,b) \times (c,d))$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, de manera que existe una función $f : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ cumpliendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y).$$

Si dicha ecuación es exacta y las funciones M y N son de clase $C^1((a,b) \times (c,d))$, se verifica aplicando el Teorema de Schwarz que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

Es más, el siguiente resultado caracteriza las ecuaciones exactas.

Teorema 2.1 *Sea la ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ donde $M, N : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ son funciones de clase $C^1((a,b) \times (c,d))$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dicha ecuación es exacta si y sólo si $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$.*

Este resultado garantiza en qué circunstancias puede decirse que una ecuación es exacta y la demostración es constructiva, ya que permite obtener las soluciones de la ecuación diferencial en cuestión. En el siguiente ejemplo, reproducimos las ideas de dicha demostración.

Consideremos la ecuación $3x^2 + 4xy + (2x^2 + 2y)y' = 0$. En dicha ecuación $M(x,y) = 3x^2 + 4xy$ y $N(x,y) = 2x^2 + 2y$ son ambas funciones de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ y se verifica que

$$4x = \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 4x.$$

Entonces, si la ecuación es exacta, existirá una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ de forma que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= M(x,y) = 3x^2 + 4xy \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= N(x,y) = 2x^2 + 2y. \end{aligned}$$

Tomando la primera expresión e integrando respecto de x obtenemos que

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx = \int (3x^2 + 4xy)dx = x^3 + 2x^2 y + g(y),$$

donde $g(y)$ es una función que proviene de la integración constante respecto de la variable x, pero que puede depender de la variable y. Utilizando la segunda igualdad se tiene que

$$2x^2 + g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y) = 2x^2 + 2y,$$

es decir

$$g'(y) = 2y.$$

Entonces

$$g(y) = y^2 + C,$$

y la ecuación

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + C = 0$$

define de forma implícita las soluciones de nuestra ecuación diferencial.

Si ahora consideramos el problema de condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 + 4xy + (2x^2 + 2y)y' = 0 \\ y(1) = 1 \end{array}\right\}$$

tenemos al ser $y(1) = 1$ que

$$f(1,1) = 1 + 2 + 1 + C = 0,$$

con lo que $C = -4$ y la ecuación

$$x^3 + 2x^2y + y^2 - 4 = 0,$$

define implícitamente la única solución de dicho problema.

2.4 Factores integrantes

Tomemos como en el apartado anterior una ecuación diferencial de la forma $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$. ¿Qué ocurre cuándo la ecuación no es exacta? Consideremos por ejemplo el caso de la ecuación $xy - x^2y' = 0$. Así $M(x,y) = xy$ y $N(x,y) = -x^2$, y como podemos comprobar fácilmente $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = x$ y $\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = -2x$, con lo que dicha ecuación no es exacta. Sin embargo, si despejamos en la ecuación y', para valores de x distintos de cero obtenemos una nueva ecuación

$$y' = y/x$$

que es de variables separadas y que por tanto es posible calcular sus soluciones. Sin embargo para ecuaciones como $y + (2x - ye^y)y' = 0$, esto no es factible.

Para abordar el cálculo de las soluciones de estas ecuaciones que no son exactas se introduce el concepto de factor integrante. Un *factor integrante* es una función $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ con $\mu(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y tal que la ecuación diferencial

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0$$

es exacta. Como $\mu(x,y) \neq 0$ para todo punto de $\mathbb{R}^2$, esta función no introduce soluciones adicionales en la ecuación diferencial original. Además, las soluciones de ésta última ecuación diferencial también son solución de la ecuación

$$y' = -\frac{\mu(x,y)M(x,y)}{\mu(x,y)N(x,y)} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

siempre que $N(x,y) \neq 0$. Para que la ecuación sea exacta ha de cumplirse que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)N(x,y)),$$

es decir,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)N(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

Dicha ecuación es en general muy difícil de resolver. Para hacer el cálculo del factor integrante más fácil, suelen añadirse hipótesis adicionales sobre el factor integrante, como que sólo dependa de la variable x o y o combinaciones de ambas.

Por ejemplo, considerando la ecuación anterior $y + (2x - ye^y)y' = 0$, tenemos que $M(x, y) = y$ y $N(x, y) = 2x - ye^y$, y claramente no es una ecuación exacta. Si planteamos las ecuaciones del factor integrante tendremos que

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y)y + \mu(x, y) = \frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y)(2x - ye^y) + \mu(x, y)2.$$

Si suponemos que el factor integrante sólo depende de la variable y, se verifica $\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y) = 0$, simplificándose así notablemente la ecuación, reduciéndose a

$$\mu'(y)y = \mu(y),$$

que resulta ser una ecuación diferencial de variables separadas. Resolviendo dicha ecuación tenemos que $\mu(y) = y$ es un factor integrante. Entonces la ecuación

$$y^2 + (2xy - y^2e^y)y' = 0$$

es exacta y por tanto existirá una función $f(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2xy - y^2e^y. \end{aligned}$$

Entonces

$$f(x, y) = \int y^2 dx = y^2 x + g(y),$$

y utilizando la otra igualdad

$$2yx + g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy - y^2e^y.$$

Por lo tanto

$$g(y) = -\int y^2e^y dy = -y^2e^y + 2ye^y - 2e^y + C$$

con lo que la solución de la ecuación diferencial viene definida de forma implícita por la ecuación

$$y^2x - y^2e^y + 2ye^y - 2e^y + C = 0.$$

2.5 Existencia y unicidad de soluciones

Llegado este punto y dado que planteamos siempre problemas de condiciones iniciales con solución única, el alumno podría pensar que este tipo de problemas tienen siempre solución única. Es por ello que abordamos el estudio de los problemas de condiciones iniciales desde un punto de vista más teórico para poner de manifiesto cuándo existe solución única, aun cuando ésta no pueda calcularse.

En primer lugar, ejemplos como

$$\begin{cases} y' = x\log y \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

ponen de manifiesto que la solución a este tipo de problemas no tiene porque existir. Es más,

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tiene más de una solución a saber $y(x) = 0$ e $y(x) = x^3$. El siguiente resultado podrá orden a todas estas ideas.

Teorema 2.2 *Sea $f : D = [t_0-a, t_0+a]\times[y_0-b, y_0+b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que la derivada parcial de f respecto a la segunda variable $\frac{\partial f}{\partial y}$ es también continua en D. Sea $M = \max\{|f(x,y)| : (x,y) \in D\}$. Entonces el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene solución única definida en $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ donde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Para demostrar el resultados se puede seguir la referencia [Bra, pag. 67–80], la cual utiliza muchas herramientas del cálculo ya estudiadas como el Teorema del valor medio, convergencia de series funcionales, etc. Está basada en la sucesión de Picard

$$\begin{cases} y_0(t) = y_0 \\ y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s))ds \end{cases}$$

generada a partir del problema integral asociado de la forma

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds.$$

Dicha sucesión de Picard también proporciona una primera idea sobre métodos numéricos de ecuaciones diferenciales que los alumnos estudiarán en la asignatura de cuarto curso de cálculo numérico.

2.6 Ejercicios

1. Verificar en cada caso que las siguientes funciones son solución de la ecuación diferencial correspondiente:

   (a) $y(x) = \dfrac{c}{\cos x}$ de $y' - y\tan x = 0$.

   (b) $x = y(x)\log y(x)$ de $y'(y+x) = y$.

   (c) $y(x) = \sqrt{x^2 - cx}$ de $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - xyy' = 0$.

(d) $x = y\,(x) \int_0^x \sin(t^2)dt$ de $y = xy' + y^2 \sin(x^2)$.

(e) $\arctan \frac{y}{x} - \log\left(c\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0$ de $x + y - (x-y)y' = 0$.

2. Demostrar que los siguientes problemas de condiciones iniciales tienen solución única.

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} y' = x^2\sqrt{x^2+y^2} \\ y(0) = 3 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} y' = x^2 e^{yx} \\ y(0) = 0 \end{array} \right. \qquad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} y' = x\log(xy) \\ y(1) = 2 \end{array} \right.$$

3. Resolver las siguientes ecuaciones de variables separables:

(a) $3e^x \tan y + y'(2-e^x)\sec^2 y = 0$ (b) $(1+e^x)yy' = e^x$; $y(0) = 1$
(c) $e^{-y}(1+y') = 1$ (d) $y' \sin x = y \log y$; $y(\pi/2) = e$
(e) $y' = \cos(x+y)$ (f) $y' = e^{x+2y}$

4. Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

(a) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ (b) $y' - y = 2xe^{x+x^2}$
(c) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$; $y(0) = 1$ (d) $y' + 2y = x^2 + 2x$; $y(3) = 0$
(e) $(a^2 - x^2)y' + 2xy = a^2$ (f) $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$

(g) $y' - 2xy = \cos x - 2x\sin x$ y tal que y es una función acotada cuando $x \to +\infty$.

(h) $y' \sin x - y\cos x = \dfrac{-\sin x}{x}$ e $y \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

5. Resolver las siguientes ecuaciones exactas o buscando un apropiado factor integrante:

(a) $\sin(xy) + xy\cos(xy) + x^2\cos(xy)y' = 0$ (b) $x + y^2 - 2yxy' = 0$
(c) $x^2 + y - xy' = 0$ (d) $2xy\log y + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})y' = 0$
(e) $2x + \dfrac{x^2+y^2}{x^2y} = y'\dfrac{x^2+y^2}{xy^2}$ (f) $1 - x^2y + x^2(y-x)y' = 0$
(g) $3x + 2y + y^2 + (2x + 2xy + 5y^2)y' = 0$ (h) $x^3 + xy^2 + (x^2y + y^3)y' = 0$
(i) $2xy + y^3 + (x^2 + 3xy^2)y' = 0$ (j) $x^2 + 2xy + (yx + 2x^2)y' = 0$

6. Una función $f(x,y)$ se dice homogénea de grado α si se cumple que $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$. Probar que las siguientes funciones son homogéneas.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ (b) $f(x,y) = x + y$ (c) $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 + 2y^3$

7. **Ecuaciones homogéneas**. Una ecuación diferencial se dice homogénea si es de la forma $y' = f(x,y)/g(x,y)$ donde $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado. Toda ecuación homogénea puede reducirse a una ecuación de variables separables introduciendo la nueva variable dependiente $v = y/x$. Utilizando este hecho resolver las siguientes ecuaciones homogéneas:

(a) $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$ (b) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ (c) $2xy'(x^2+y^2) = y(y^2 + 2x^2)$

(d) $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$ (e) $4x^2 - xy + y^2 = y'(xy - x^2 - 4y^2)$

8. **Ecuación de Bernuilli**. Una ecuación diferencial se dice de Bernuilli si puede escribirse en la forma $y' + f(x)y = q(x)y^\alpha$, $\alpha \neq 0$ o 1. Toda ecuación de Bernuilli puede escribirse como una ecuación lineal haciendo un cambio de variable en la variable dependiente $v = y^{1-\alpha}$. Utilizando este hecho, resolver las siguientes ecuaciones:

   (a) $xy' + y = y^2 \log x$ (b) $3xy' - 2y = x^3/y^2$ (c) $8xy' - y = -\dfrac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$

   (d) $x^2y' + 2x^3y = y^2(1+2x^2)$ (e) $(1+x^2)y' = xy + (xy)^2$ (f) $y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{1}{2}(x+1)^3y^2$

9. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

   (a) $y' = (x-y)^2 + 1$ (b) $y' + y\cos x = y^n \sin 2x;\ n \neq 1$
   (c) $y - xy^2 \log x + xy' = 0$ (d) $y' - 1 = e^{x+2y}$
   (e) $3y^2 - x + (2y^3 - 6xy)y' = 0$ (f) $x^2 + xy' = 3x + y'$
   (g) $x^2 + y^2 - xyy' = 0$ (h) $\sqrt{1+x^2} + ny + \left(\sqrt{1+y^2} + nx\right)y' = 0;\ y(0) = n$
   (i) $x - y^2 + 2xyy' = 0$ (j) $(x+1)y' = y - 1$
   (k) $x^3 - 3xy^2 + (y^3 - 3x^2y)y' = 0$ (l) $2xy'' - y' = 3x^2$

   Ayuda: Probar en (c) un factor integrante de la forma $\mu(x \cdot y)$. Probar en (e) un factor integrante de la forma $\mu(x + y^2)$.

10. Resolver los problemas de condiciones iniciales siguientes:

$$\text{(a)} \begin{cases} x + y\cos x = -y'\sin x \\ y(\pi/2) = 2. \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} y' = \dfrac{y^3}{1-2xy^2} \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} x + ye^{-x}y' = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{(d)} \begin{cases} \dfrac{2x}{y + x^2y} = y' \\ y(0) = 2. \end{cases} \quad \text{(e)} \begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{(f)} \begin{cases} y' - y = 2xe^{2x} \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad \text{(g)} \begin{cases} y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{\cos x}{x^2} \\ y(\pi) = 0. \end{cases} \quad \text{(h)} \begin{cases} xy' + 2y = \sin x \\ y(\pi/2) = 1. \end{cases}$$

Capítulo 3

Aplicaciones de las ecuaciones de orden uno

Sumario. Problemas geométricos. Familias ortogonales. Descomposicón radioactiva. Ley de enfriamiento de Newton: aplicación a la climatización de edificios. Problemas de mezclas químicas. La catenaria.

3.1 Problemas geométricos

En un principio, las ecuaciones diferenciales permiten resolver problemas geométricos que son dificilmente abordables desde otro punto de partida. Por ejemplo, consideremos el siguiente: determinar la familia de curvas del plano que verifican que en cada punto P su recta normal corta al eje Y en un punto M tal que la distancia de M a P es uno.

Para resolver este problema, supongamos que $y(x)$ es una curva de la familia y vamos a determinar la ecuación diferencial de dicha familia. Resolviendo la ecuación diferencial obtendremos la familia uniparamétrica de curvas que cumplen con la condición pedida. Fijemos un punto arbitrario (x, y) de la gráfica de $y(x)$ y sea $Y - y = y'(X - x)$ su recta tangente y por tanto $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$ (nótese las variables de las rectas las escribimos en mayúsculas). El punto de corte con el eje Y lo obtenemos resolviendo el sistema

$$\begin{cases} Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x), \\ Y = 0. \end{cases}$$

Despejando X se tiene que el punto de corte es

$$M = (x + yy', 0)\,.$$

Calculamos ahora la distancia de M a P,

$$d(P, M) = \sqrt{(x - yy' - x)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{(yy')^2 + y^2} = 1,$$

de donde

$$(yy')^2 + y^2 = 1.$$

Despejamos y', teniendo las ecuaciones de variables separables

$$y' = \pm \frac{1}{y\sqrt{1-y^2}}$$

que tienen por solución en el caso positivo

$$-\frac{1}{3}\sqrt{(1+y^2)^3} = x + c$$

y

$$\frac{1}{3}\sqrt{(1+y^2)^3} = x + c$$

en el caso negativo.

3.1.1 Familias ortogonales

Otro problema geométrico que se aborda mediante ecuaciones diferenciales es el cálculo de las familas ortogonales. Dos familias de curvas se dicen ortogonales si en cada punto de intersección de una curva de cada familia, las rectas tangentes a cada curva de cada familia son perpendiculares. Por ejemplo vamos a hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de curvas $y = cx^4$. Para ello, en primer lugar obtenemos la ecuación diferencial de la familia de curvas eliminando c en el sistema

$$\begin{cases} y' = 4cx^3, \\ y = cx^4, \end{cases}$$

de donde

$$xy' = 4y$$

y la ecuación diferencial de la familia ortogonal es

$$-\frac{x}{y'} = 4y,$$

teniendo en cuenta que si y' es la pendiente de la recta tangente a una curva de la primera familia, $-1/y'$ es la pendiente de la recta tangente de la familia ortogonal, al ser ambas rectas perpendiculares. Resolviendo la ecuación

$$4yy' = -x$$

tenemos que

$$2y^2 = \frac{-x^2}{2} + c, \; c \geq 0$$

o equivalentemente

$$\frac{x^2}{2c} + \frac{y^2}{(c/2)} = 1$$

es la familia uniparamétrica de elipses ortogonal a la familia $y = cx^4$.

3.2 Descomposición radioactiva

Consideremos un isótopo radioactivo del cual tenemos una cantidad $y(t)$ que varía con el tiempo t. Una sustancia radioactiva tiende a descomponerse con el tiempo formando nuevas sustancias y liberando a su vez una gran cantidad de energía. Se ha comprobado experimentalmente que la velocidad con que una sustancia radioactiva se descompone es directamente proporcional a la cantidad de sustancia existente en dicho instante, es decir, satisface la ecuación diferencial

$$y' = Ky$$

donde K es una constante que depende de la sustancia considerada. Esta ecuación es de variables separadas, y proporciona las soluciones

$$y(t) = Ce^{Kt},$$

con C la constante proveniente de la integración.

Se define la vida media de una sustancia radioactiva t_m, como el tiempo necesario para que una cantidad de dicha sustancia se reduzca a la mitad. Si tenemos una cantidad inicial de una sustancia N_0, su vida media puede calcularse resolviendo primero el problema de condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{r} y' = Ky \\ y(0) = N_0 \end{array}\right\}$$

que proporciona la solución

$$y(t) = N_0 e^{Kt},$$

y posteriormente la ecuación

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{Kt_m},$$

con lo que la vida media es

$$t_m = -\frac{\log 2}{K}.$$

Como podemos observar, la vida media de la sustancia depende de la constante K, que es intrínseca de cada sustancia.

3.3 Ley de enfriamiento de Newton.

Los contenidos de esta sección pueden verse en [NaSa]. Supongamos que tenemos un cuerpo inerte que no produce calor de manera autosuficiente, cómo por ejemplo el agua, una piedra o un reloj. De observaciones experimentales se sabe que la temperatura superficial de dicho cuerpo varía con una rapidez proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su entorno. Es decir, si denotamos por $y(t)$ la temperatura del cuerpo con el tiempo, ésta verifica la ecuación diferencial

$$y' = K(T - y),$$

donde K es una constante de proporcionalidad y T es la temperatura ambiente en ese momento. Dicho comportamiento es conocido cómo la ley de enfriamiento de Newton. Por ejemplo, si servimos una taza de café a una temperatura de 95^0C y al minuto está a 85^0C, y suponiendo que la habitación está a 20^0C, ¿cuándo podremos tomar el café si la temperatura idónea para tomarlo es de 65^0C ? Para responder a esta pregunta, basta con resolver el problema de condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} y' = K(20 - y) \\ y(0) = 95. \end{array}\right\}$$

Obtenemos la solución de la ecuación diferencial, que es de variables separadas calculando

$$\int \frac{y'(t)}{20 - y(t)} dt = \int K dt,$$

que nos proporciona la solución

$$y(t) = Ce^{-Kt} + 20,$$

donde K es una constante proveniente de la integración. Imponiendo ahora que $y(0) = 95$, calculamos dicha constante resolviendo la ecuación

$$95 = y(0) = C + 20,$$

con lo que $C = 75$. Por otra parte, como al minuto de haber servido el café la temperatura de éste había descendido hasta los 85^0C tenemos que

$$85 = y(1) = 75e^{-K} + 20,$$

que permite obtener el valor de la constante $K = \log(13/15)$. La función

$$y(t) = 75e^{t \log(13/15)} + 20$$

define entonces la evolución de la temperatura de la taza de café con el tiempo. Para averiguar el momento en el cual la temperatura de dicha taza es de 65^0C basta resolver la ecuación

$$65 = 75e^{t \log(13/15)} + 20,$$

que da la solución

$$t = \frac{\log(9/15)}{\log(13/15)} = 3.57 \text{ minutos.}$$

Es decir, aproximadamente unos tres minutos y medio después de haber servido el café.

3.3.1 Aplicación a la climatización de edificios

Supongamos que tenemos un edificio que en un principio vamos a considerar como una unidad, es decir, no vamos a tener en cuenta el número de habitaciones que tiene (ya veremos posteriormente este caso). Si $T(t)$ es la temperatura del edificio vacío en un instante de tiempo t y $E(t)$ es la temperatura en el exterior (que puede ser variable), la ley de Newton afirma que

$$T'(t) = K(E(t) - T(t)).$$

Si suponemos constante $E(t) = E_0$, entonces la ecuación puede escribirse como

$$T'(t) = \frac{dT}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(T(t) - E_0) = -K(T(t) - E_0),$$

que nos proporciona la solución

$$T(t) - E_0 = ce^{-Kt};\ c \in \mathbb{R}.$$

Si $T(0)$ es la temperatura inicial del edificio $c = T(0) - E_0$ y la solución es

$$T(t) - E_0 = (T(0) - E_0)e^{-Kt}.$$

El tiempo que transcurre desde el valor $T(0) - E_0$ hasta el valor $(T(0) - E_0)/e$ e $t_0 = 1/K$, que recibe el nombre de constante de tiempo del edificio, y que suele medirse en horas. Un valor normal para un edificio cerrado oscila entre la 2 y las 4 horas para la constante $1/K$.

Si el edificio no esta vacío se produce un calentamiento adicional debido al calor corporal, luces, máquinas en funcionamiento, etcétera, cuya razón denotaremos por $H(t)$. Si adicionalmente el edificio dispone de un sistema de calefacción o de aire acondicionado, se produce un aumento o disminución de la temperatura que denotaremos por $U(t)$. Entonces, la ecuación anterior queda como

$$T'(t) = K(E(t) - T(t)) + H(t) + U(t),$$

que escribiéndola como

$$T'(t) = -KT(t) + (KE(t) + H(t) + U(t))$$

vemos claramente que es lineal.

Ejemplo 3.1 Supongamos una mañana de sábado caluroso que en una tienda, mientras las personas están trabajando el aire acondicionado mantiene la temperatura de la tienda a $20\,^oC$. A mediodia se apaga el aparato de aire acondicionado y la gente se va a sus casas. La temperatura exterior permanece constante a $35\,^oC$. Si la constante de tiempo del edificio es de 4 horas, ¿cuál será la temperatura del edificio a las 2 de la tarde? ¿En que momento la temperatura en el interior será de $27\,^oC$?

Para responder a esta pregunta planteamos la ecuación diferencial

$$T'(t) = \frac{1}{4}(35 - T(t)),$$

dado que $H(t) = U(t) = 0$, junto con la condición inicial $T(0) = 20$, que se corresponde con la temperatura al mediodía. La solución de la ecuación diferencial será

$$T(t) = ce^{-t/4} + 35,$$

y con la condición inicial obtenemos c que nos proporciona la solución

$$T(t) = -15e^{-t/4} + 35.$$

Así a las dos de la tarde la temperatura será de

$$T(2) = -15/\sqrt{e} + 35 \simeq 25.9\,^oC.$$

El momento t_0 en que la temperatura será de $27\,^oC$ se obtendrá al resolver la ecuación

$$27 = -15e^{-t_0/4} + 35,$$

que nos da

$$t_0 = -4\log\frac{8}{15} \simeq 2.51 \text{ horas}$$

es decir, aproximadamente a la 2 horas y media.

Ejemplo 3.2 Un calentador solar de agua consta de un tanque de agua y un panel solar. El tanque se encuentra bien aislado y tiene una constante de tiempo de 64 horas. El panel solar genera 2000 kilocalorías por hora durante el día y el tanque tiene una capacidad calorífica de $2\,^oC$ por cada 1000 kilocalorías. Si el agua se encuentra inicialmente a $30\,^o$C y la temperatura ambiente es de $20\,^oC$, ¿cuál será la temperatura del tanque al cabo de 12 horas de luz solar?

En este caso

$$U(t) = 2\,^oC/1000\,Kcal \times 2000\,Kcal/h = 4\,^oC/h,$$

con lo que la ecuación diferencial que modeliza el fenómeno es

$$T'(t) = \frac{1}{64}(20 - T(t)) + 4,$$

junto con la condición inicial $T(0) = 30\,^oC$. La solución de dicha ecuación diferencial es

$$T(t) = ce^{-t/64} + 276,$$

de donde la solución del problema de condiciones iniciales es

$$T(t) = -246e^{-t/64} + 276.$$

Al cabo de 12 horas la temperatura del agua del tanque es

$$T(12) = 72.06\,^oC.$$

3.4 Problemas de mezclas químicas.

Las ecuaciones diferenciales también tienen aplicación dentro de los problemas de mezclas. En estos problemas aparecen involucradas sustancias, las cuales se mezclan dentro de un recipiente de volumen dado V_0. Supongamos que inicialmente teníamos una cantidad de X_0 kilogramos de una sustancia diluida en una concentración de X_0/V_0 Kg/m^3, y que introducimos otra solución que contiene una concentración b Kg/m^3 de dicha sustancia la cual es introducida en el recipiente a una velocidad de e m^3/sg. Además sacamos parte de la solución que se produce dentro del recipiente a una velocidad de f m^3/sg. Si denotamos por $y(t)$ la cantidad de sustancia en cuestión dentro del recipiente por unidad de tiempo, tenemos que la variación de dicha cantidad viene dada por

$$y' = v_e - v_s,$$

donde v_e y $v_s$son las velocidades de entrada y salida de dicha sustancia respectivamente. Como $v_e = be\ Kg/sg$ y $v_s = y(t)/V(t)\ Kg/sg$ donde $V(t) = V_0 + et - ft$ es el volumen de disolución en el recipiente por unidad de tiempo, el problema de condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} y' = be + \frac{y}{V_0+et-ft} f \\ y(0) = X_0 \end{array}\right\}$$

modeliza la cantidad de sustancia que hay en el recipiente por unidad de tiempo.

Por ejemplo, supongamos una tanque que contiene originalmente 400 litros de agua limpia. Vertemos en el tanque agua que contiene 0.05 kilogramos de sal por litro a una velocidad de 8 litros por minuto, y se deja que la mezcla salga del recipiente a la misma rapidez. Vamos a determinar la cantidad de sal que habrá en el recipiente al cabo de 20 minutos. Para ello, teniendo en cuenta que el volumen se mantiene constante, planteamos el problema de condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} y' = 0.4 + \frac{y}{1000} \\ y(0) = 0. \end{array}\right\}$$

La ecuación diferencial implicada es lineal. La ecuación homogénea $y' = \frac{y}{1000}$ tiene por solución $y(t) = Ke^{t/1000}$, donde K es la constante procedente de la integración. Por el método de variación de constantes calculamos la solución de la ecuación no homogénea imponiendo que $y(t) = K(t)e^{t/1000}$ sea solución de la misma. Entonces

$$K'(t)e^{t/1000} + K(t)\frac{e^{t/1000}}{1000} = 0,4 + K(t)\frac{e^{t/1000}}{1000},$$

con lo que

$$K(t) = 0.4 \int e^{-t/1000} dt = -\frac{4}{10000} e^{-t/1000} + C.$$

Así la solución de la ecuación diferencial será

$$y(t) = -\frac{4}{10000} + Ce^{t/1000}.$$

Además, como $y(0) = 0$, tenemos que

$$0 = -\frac{4}{10000} + C,$$

con lo que $C = 1/1000$, y la solución del problema de condiciones iniciales es

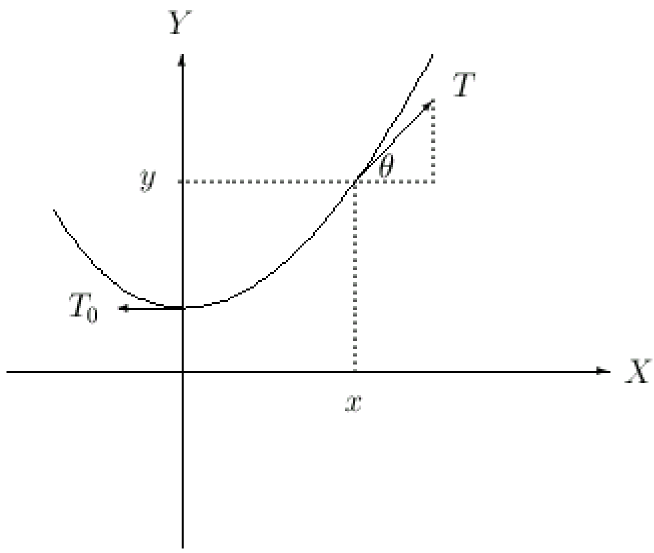
$$y(t) = \frac{4}{10000}(e^{t/1000} - 1).$$

A los 20 minutos, la cantidad de sal que hay dentro del tanque es

$$y(20) = \frac{4}{10000}(e^{1/50} - 1) = 0.808 \times 10^{-6} \text{ kilogramos}.$$

3.5 La catenaria.

Al estudiar las ecuaciones de orden uno, también explicaremos aquellas ecuaciones de orden superior que son reducibles a ecuaciones de orden uno. Tomemos por ejemplo el caso de la *catenaria* (ver [Sim, pag. 69] o [Pui, pag. 62]). Supongamos un cable colgado entre dos puntos tal como muestra la figura y sea P_0 el punto de tangencia horizontal, donde situamos el eje vertical.



Si denotamos por s la longitud del arco, la relación entre las fuerzas en un punto cualquiera de la curva viene dada por

$$\int_0^s \rho(s)ds = T\sin\theta$$

y

$$T_0 = T\cos\theta,$$

donde T_0 es la tensión del cable en el punto P_0, T es la tensión en dicho punto y $\rho(s)$ es la densidad de masa en cada punto del cable. Teniendo en cuenta que

$$T\sin\theta = T_0\tan\theta = T_0\frac{dy}{dx},$$

obtenemos que

$$T_0 y'(x) = \int_0^s \rho(s)ds.$$

Derivando respecto de x la ecuación anterior

$$T_0 y''(x) = \frac{d}{ds}\int_0^s \rho(s)ds \cdot \frac{ds}{dx} = \rho(s)\sqrt{1+y'(x)^2},$$

de donde obtenemos la ecuación diferencial

$$T_0 y''(x) = \rho(s)\sqrt{1+y'(x)^2}.$$

Para continuar necesitamos alguna información adicional sobre $\rho(s)$. Si suponemos por ejemplo que ésta es constante, la ecuación anterior queda de la forma

$$y'' = a\sqrt{1+(y')^2}, \quad a = \rho_0/T_0,$$

de donde resolviendo la ecuación en y' con las condiciones iniciales $y'(0) = 0$,

$$y'(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}).$$

Situando el eje horizontal de manera que $y(0) = 1/a$ concluimos que la solución es de la forma

$$y(x) = \frac{1}{a}\cosh(ax).$$

Información adicional sobre la catenaria puede verse en la referencia [Pui, pag. 62–64], donde se ofrecen algunas aplicaciones a la técnica de esta curva.

3.6 Ejercicios

1. Demostrar que la curva que posee la propiedad de que todas sus rectas normales pasan por un punto constante es una circunferencia.

2. Una bala se introduce en una table con una velocidad $v_0 = 200\,m/s$ y al atravesarla sale con una velocidad $v_1 = 80\,m/s$. Suponiendo que la resistencia de la tabla al movimiento de la bala es proporcional al cuadrado de la velocidad, hallar en cuánto tiempo atraviesa la tabla la bala.

3. El isótopo radioactivo del Torio 234 se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad existente en ese instante de tiempo. Si 100 miligramos de este material se reducen a 82.04 miligramos en un semana, ¿cuánto Torio tendremos al cabo de tres semanas? ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que la cantidad de Torio se reduzca a la mitad?

4. De observaciones experimentales se sabe que la temperatura superficial de un objeto cambia con una rapidez proporcional a la diferencia de temperatura del objeto y su entorno. Este hecho es conocido como la ley de enfriamiento de Newton. Si la temperatura de una taza de café es de 95^0C recién servida, y al minuto se enfrió a 88^0C en un cuarto que está a 20^0C, ¿cuánto tiempo debe de transcurrir para que se enfrie hasta los 65^0C?

5. Supongamos que decidís matar al profesor de ecuaciones diferenciales. Una vez perpetrado el hecho, se encuentra el cuerpo en el despacho del mismo que está a una temperatura de 20^0C a las 6 de la tarde. La temperatura corporal de cadáver era de 35^0C en dicho momento. Una hora más tarde la temperatura era de 33^0C. ¿A que hora se produjo el horripilante y brutal suceso?

6. Un tanque contiene originalmente 400 litros de agua limpia. Entonces se vierte en el tanque agua que contiene 0.05 kilogramos de sal por litro a una velocidad de 8 litros por minuto, y se deja que la mezcla salga del tanque con la misma rapidez. Determinar la sal que habrá en el tanque después de 20 minutos.

7. Hallar las curvas que verifican cada una de las siguientes propiedades geométricas:

   a) La distancia de un punto de la curva al origen es igual a la longitud del segmento de la normal en el punto delimitado por el propio punto y el eje OX.

   b) La proyección sobre el eje OX de la parte de la normal en (x, y) delimitada por (x, y) y el eje OX es 1.

   c) La proyección sobre el eje OX de la parte tangente entre (x, y) y el eje OX tiene longitud 1.

   d) La distancia del origen a cada tangente es igual a la abcisa del punto de tangencia correspondiente.

8. Hallar las trayectorias ortogonales a las familias de curvas siguientes:

$$\text{(a) } x^2 + y^2 = c^2. \quad \text{(b) } y^2 = 4c(x + c). \quad \text{(c) } y = cx^4.$$

9. Hallar la ecuación diferencial que proporcionan las curvas planas (respecto de un sistema de coordenadas cartesianas regular) tales que la tangente a la curva en los puntos M de ella que corta al eje OY en un punto B de forma que $\overline{MB} = \overline{AB}$ siendo A=$(0, 0)$ en un punto fijo del eje OX.

10. Hallar la ecuación de las curvas planas tales que la tangente en un punto M cualquiera de ellas corta al eje OY en un punto P de modo que el punto medio del segmento $\overline{MP}$ está en la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 1$.

11. Comenzó a nevar una mañana y continuó nevando con regularidad durante todo el día. Al mediodía una maquina quitanieve comenzó a limpiar una carretera a ritmo constante en términos de volumen de nieve retirado por hora. A las dos de la tarde la máquina había avanzado dos kilómetros y a las cuatro de la tarde tan sólo un kilómetro más. ¿A que hora comenzó a nevar?

12. Entre los alumnos de esta asignatura se extiende el rumor de que el examen de problemas va a ser muy difícil. Si hay 1000 alumnos de dicha asignatura y el rumor se extiende de manera proporcional al número de alumnos que todavía no lo han oído, ¿cuántos días tardarán en saberlo 950 alumnos sabiendo que a los dos días lo sabían 850 alumnos?

13. Un tanque contiene inicialmente 1000 litros de solución salina que contiene 10 Kg. de sal. Otra solución salina que contiene 25 Kg. de sal por litro se vierte en el tanque a la razón de $10\, l/\min$ mientras que simultaneamente, la solución bien mezclada sale del tanque a razón de $15\, l/\min$. Encontrar la cantidad de sal que hay en el tanque en un momento t.

14. En una galería subterranea de $15 \times 15 \times 1.2m$ hay un 0.2% de CO_2, mientras que el aire del exterior tiene un 0.055% de CO_2. Se instalan ventiladores que introducen en la galería 9 metros cúbicos de aire del exterior por minuto, de forma que por el otro extremo de la galería sale la misma cantidad de aire. ¿Qué concentración de CO_2 habrá al cabo de 20 minutos en la galería?

15. En una mañana de sábado, mientras las personas trabajan, un calefactor mantiene la temperatura interior de un edificio a $21\,^oC$. A mediodía se apaga el calentador y la gente regresa a

casa. La temperatura exterior permanece constante a $12\,^oC$ durante el resto de la tarde. Si la constante de tiempo del edificio es de 3 horas, ¿en qué momento la temperatura interior del edificio será de $16\,^o$C?

16. Un taller mecánico sin calefacción ni aire acondicionado tiene una constante de tiempo de 2 horas. Si la temperatura exterior varía según la función $E(t) = 30 - 15\cos(2\pi t/24)$, determinar la temperatura del taller a lo largo del día.

17. En un día caluroso con una temperatura exterior de $40\,^oC$, se enciende dentro de un edificio un aparato aire acondicionado que disipa 24000 kilocalorías por hora. El aprovechamiento es de medio grado por cada 1000 kilocalorías y la constante de tiempo del edificio es de 3 horas. Si inicialmente la temperatura del edificio era de $35\,^oC$, determinar la temperatura al cabo de 3 horas. ¿Cuál es el valor máximo de temperatura que puede tener el edificio en estas condiciones?

Capítulo 4

Teoría general de sistemas y ecuaciones lineales

Sumario. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Teorema de existencia y unicidad de soluciones. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Teorema de existencia y unicidad de soluciones. Sistemas homogéneos: Teorema de caracterización de soluciones. Sistemas no homogéneos: Teorema de caracterización de soluciones. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n. Teoremas de caracterización de soluciones.

4.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones diferenciales

Para nosotros, un sistema de ecuaciones diferenciales es una expresión de la forma

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_m, y_m') = 0; \\ F_2(x, y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_m, y_m') = 0; \\ \vdots \\ F_m(x, y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_m, y_m') = 0; \end{cases}$$

donde $y_1, y_2, ..., y_m$ son funciones reales a determinar que dependen de x y $F_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+2m} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, son funciones reales de varias variables. Se suele suponer que hay igual número de ecuaciones que de incógnitas de manera que todas las ecuaciones son independientes, es decir, ninguna puede deducirse de las demás. Estamos interesados en aquellos sistemas de ecuaciones diferenciales en los que podemos despejar la primera derivada de cada una de las funciones incógnita, es decir, sistemas de la forma

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, ..., y_m); \end{cases}$$

donde $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+m} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, son funciones reales. Ejemplos de estos sistemas son

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2^2; \\ y_2' = x + y_1 + y_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = x + y_1 + y_2 y_3; \\ y_3' = y_1 y_2 y_3; \end{cases}$$

En general la resolución de estos sistemas no es posible, salvo en casos excepcionales. Sólo para el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, que veremos un poco más tarde existen algoritmos que permiten el cálculo explícito de las soluciones. Sin embargo, es relativamente sencillo saber cuándo un sistema tiene solución, o más precisamente cuándo un problema de condiciones iniciales asociado tiene solucón. Primero claro está, debemos definir qué entendemos por un problema de condiciones iniciales para sistemas de ecuaciones diferenciales. Dicho problema es un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_1(x_0) = y_1, y_2(x_0) = y_2, ..., y_m(x_0) = y_m \end{cases}$$

junto con las condiciones $y_i(x_0) = y_i$, donde $x_0, y_1, y_2, ..., y_m$ son números reales. Por ejemplo

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = x + y_1 + y_2 y_3; \\ y_3' = y_1 y_2 y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1, \end{cases}$$

es un problema de condiciones iniciales. Nótese que todas las condiciones iniciales implican el conocimiento de la función en 0, es decir, lo siguiente

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = x + y_1 + y_2 y_3; \\ y_3' = y_1 y_2 y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(1) = 0, y_3(0) = 1, \end{cases}$$

no sería un problema de condiciones iniciales, ya que conocemos y_2 en 1 e y_1 e y_3 en 0.

Para el caso de los problemas de condiciones iniciales para sistemas de ecuaciones diferenciales tenemos el siguiente resultado análogo al de ecuaciones diferenciales de orden uno.

Teorema 4.1 *Sea el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_1(x_0) = y_1, y_2(x_0) = y_2, ..., y_m(x_0) = y_m \end{cases}$$

donde $(x_0, y_1, ..., y_m) \in A$*,* $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+m} \to \mathbb{R}$*,* $1 \leq i \leq m$*, son funciones reales continuas en el abierto* A*. Supongamos además que las funciones* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ *existen y son continuas en* A*. Entonces existe una solución del problema de condiciones iniciales anterior* $y_i : I \to \mathbb{R}$*,* $1 \leq i \leq m$*, definido en un intervalo abierto* I *de la recta real.*

Este resultado es fácil de aplicar. Por ejemplo el problema que consideramos anteriormente

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = x + y_1 + y_2y_3; \\ y_3' = y_1y_2y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1, \end{cases}$$

es tal que $f_1(x, y_1, y_2, y_3) = xy_1 + y_2^2 - y_3$, $f_2(x, y_1, y_2, y_3) = x + y_1 + y_2y_3$ y $f_3(x, y_1, y_2, y_3) = y_1y_2y_3$ son funciones definidas en $\mathbb{R}^4$, continuas y las derivadas parciales de cada función respecto de y_1, y_2 e y_3 son continuas. Entonces este problema de condiciones iniciales tiene solución única, aunque no tengamos ni idea de cómo calcularla. Se verá en la asignatura de cuarto curso métodos numéricos cómo obtener soluciones aproximadas, y en esta misma asignatura estudiaremos cómo obtener información parcial sobre el sistema incluso sin conocer las soluciones.

4.2 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Como hemos comentado anteriormente en general no va a ser posible resolver sistemas de ecuaciones diferenciales salvo en ciertos casos particulares. Uno de ellos va a ser el de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, cuya teoría general pasamos a estudiar. Vamos a ver a continuación cómo son las soluciones de un sistema de este tipo, pero antes necesitamos conocer un poco más sobre éstos. Un sistema de *ecuaciones diferenciales lineales* es una expresión de la forma

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases}$$

donde para cada $1 \leq i, j \leq n$, a_{ij} y b_j son funciones reales definidas sobre un intervalo I. Si denotamos por

$$\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))_{1\leq i\leq n}^{1\leq j\leq n} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & ... & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & ... & a_{2n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & ... & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

y por

$$\mathbf{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), ..., b_n(x))^t = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ ... \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^t = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix},$$

el sistema anterior puede escribirse de forma matricial como

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x), \tag{4.1}$$

donde por $\mathbf{y}'$ se entenderá la derivada coordenada a coordenada, es decir,

$$\mathbf{y}' = (y_1', y_2', ..., y_n')^t = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdots \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, los sistemas

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + e^x y_2 + 1 - x^2, \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + x^2 y_2 + y_3 + 1 - x^2, \\ y_2' = xy_1 - x^2 y_2 + e^{-x}, \\ y_3' = y_1 + (1-x) y_2 + y_3 \end{cases}$$

son lineales. Un sistema se dirá *homogéneo* si $\mathbf{b}(x) = (0, 0, ..., 0)^t$, es decir, el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + x^2 y_2 + y_3, \\ y_2' = xy_1 - x^2 y_2, \\ y_3' = y_1 + (1-x) y_2 + y_3 \end{cases}$$

es homogéneo. Se dirá *no homogéneo* en caso contrario. Nosotros le prestaremos una gran atención a los sistemas lineales con coeficioentes constantes. Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales se dirá de *coeficientes constantes* si la matriz $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}$ es constante. Ejemplos de tales sistemas, tanto homogéneos como no homogéneos son

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 1 - x^2, \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 - y_2 + 7y_3, \\ y_3' = -4y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$$

Veremos en los sucesivos temas cómo resolver estos últimos sistemas, dando un algoritmo que permitirá el cálculo de la solución general del mismo.

Previamente, estudiaremos la teoría general de los sistemas de ecuaciones lineales y para posteriormente particularizarla al caso de las ecuaciones lineales de orden mayor o igual que dos (ver la última sección de este tema). Esta teoría general de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales se sustenta en la noción de espacio vectorial de dimensión finita estudiadas en la parte de álgebra lineal impartida durante el curso y utiliza el siguiente resultado sobre existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones y sistemas que se deducen directamente del Teorema 4.1.

Teorema 4.2 *Sea $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$ un sistema de ecuaciones diferenciales lineales donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b}$ están definidas en un intervalo $I_{x_0} = [x_0 - a, x_0 + a]$. Si estas funciones son continuas en dicho intervalo, entonces el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

tiene solución única definido en todo I_{x_0}.

Recordemos por un instante dos nociones que será importante tener claras para entender la teoría que a continuación vamos a desarrollar. Por un lado hemos de tener presente que bajo la notación que estamos utilizando, una solución de un sistema lineal es una función $\mathbf{y} : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, o dicho de otro modo, un vector cuyas componentes son funciones reales. Por ejemplo, dado el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1, \end{cases}$$

una solución del mismo es $\mathbf{y}(x) = (\sin x, \cos x)^t$, es decir, $y_1(x) = \sin x$ e $y_2(x) = \cos x$.

Por otra parte, recordemos una noción de básica del álgebra lineal. Si tenemos n vectores cuyas componentes son funciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$, se dicen linealmente independientes si para toda combinación lineal

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n . \mathbf{y}_n = \mathbf{0},$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, y $\mathbf{0}$ es el vector que tiene a la función nula en cada componente, entonces necesariamente $\alpha_i = 0$, $1 \leq i \leq n$.

Vamos a empezar el estudio de los sistemas homogéneos, empezando por el siguiente resultado. Las demostraciones de los siguientes resultados están basados en el Teorema 4.2.

Teorema 4.3 *El conjunto de soluciones del sistema homogéneo*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} \tag{4.2}$$

tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$, esto es, cualquier solución $\mathbf{y}$ del mismo es de la forma

$$\mathbf{y} = c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + c_n \cdot \mathbf{y}_n$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ son soluciones linealmente independientes del mismo.

Demostración. En primer lugar, veamos que cualquier combinación lineal de soluciones del sistema (4.2) es una solución del mismo. Para ello, sean $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_k$ soluciones de (4.2) y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$. Consideramos el vector de funciones $\mathbf{z} = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_k \cdot \mathbf{y}_k$ y derivamos respecto de la variable independiente (notar que $\mathbf{z} = \mathbf{z}(x)$), obteniéndose, por ser $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_k$ soluciones de (4.2) que

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1' + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2' + ... + \alpha_k \cdot \mathbf{y}_k' \\ &= \alpha_1 \cdot \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_k \cdot \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}_k \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot [\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_k \cdot \mathbf{y}_k] \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{z}, \end{aligned}$$

que prueba que $\mathbf{z}$ es solución.

Sea ahora $\mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es decir, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathbf{u}_i$ es el vector de $\mathbb{R}^n$ que tiene 0 en todas las componentes salvo en la i–ésima, donde tiene un 1. Sea x_0 un número real y supongamos que $\mathbf{A}(x)$ está definida en I_{x_0} (ver Teorema 4.2). Para cada $1 \leq i \leq n$, consideramos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}; \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{u}_i. \end{cases}$$

En virtud del Teorema 4.2, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ existe una única solución de dicho problema, que denotaremos por $\mathbf{y}_i$, definida en I_{x_0}. Vamos a ver que $\mathcal{B} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n\}$ forman una base del conjunto de soluciones del sistema 4.2.

Veamos primero que son linealmente independientes. Para ello sea

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{0}.$$

Particularizamos en x_0 y obtenemos que

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1(x_0) + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2(x_0) + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n(x_0) = \mathbf{0}(x_0) = \mathbf{0},$$

y por ser cada $\mathbf{y}_i$ solución del problema de condiciones iniciales, $\mathbf{y}_i(x_0) = \mathbf{u}_i$, $1 \leq i \leq n$, de donde

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Como los vectores $\mathbf{u}_i$ son los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, son linealmente independientes y por tanto $\alpha_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, de donde $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ son linealmente independientes.

Acto seguido, vamos a ver que $\mathcal{B}$ es un sistema generador del conjunto de soluciones del sistema (4.2). Para ello sea $\mathbf{z}$ una solución arbitraria del sistema (4.2). Sea x_0 el número real del apartado anterior. Como $\mathcal{C}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, se verifica que existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{z}(x_0) = \alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n.$$

Sea el vector de funciones

$$\mathbf{z}_1 = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n$$

y consideremos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}; \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{z}(x_0). \end{cases}$$

Claramente tanto $\mathbf{z}$ como $\mathbf{z}_1$ son soluciones de dicho problema. Como la solución es única en virtud del Teorema 4.2, se tiene que

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n,$$

por lo que $\mathcal{B}$ también es un sistema generador y la demostración concluye. ■

Aunque el resultado anterior caracteriza las soluciones del sistema homogéneo, el cálculo explícito de las soluciones dista mucho de estar al alcance. Un primer avance en el objetivo del cálculo de las soluciones lo proporciona el determinante *wronskiano*, definido de la manera siguiente.

Dadas $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se define su determinante wronskiano como la función real $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n] : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida todo $x \in I$ como

$$W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x) := |\mathbf{y}_1(x); \mathbf{y}_2(x); ...; \mathbf{y}_n(x)|.$$

El determinante wronskiano resulta ser útil a la hora de determinar si n soluciones del sistema homogéneo son o no linealmente independientes, como pone de manifiesto el siguiente resultado.

Proposición 4.4 *Sean* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *soluciones del sistema homogéneo* $\mathbf{y}' = A(x) \cdot \mathbf{y}$. *Son equivalentes:*

(a) $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ *son linealmente independientes.*

(b) $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$.

(c) Existe $x_0 \in I$ *tal que* $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x_0) \neq 0$.

Demostración. Veamos en primer lugar que (a) implica (b). Procedemos por reducción al absurdo suponiendo que (b) es falso, esto es, existe $x_0 \in I$ tal que $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x_0) = 0$. Entonces los vectores de $\mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes, es decir, existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tal que

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1(x_0) + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2(x_0) + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n(x_0) = \mathbf{0}.$$

Consideremos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}; \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Obviamente el vector de funciones $\mathbf{0}$ (cuyas componentes son la función nula) es solución de dicho problema. Por otra parte, procediendo como en el final de la demostración del Teorema 4.3, vemos que la función

$$\mathbf{z} = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n$$

también es solución de dicho problema. Como la solución debe ser única por el Teorema 4.2, tenemos que

$$\mathbf{z} = \mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n.$$

Como los escalares α_i no eran todos nulos, tenemos que las funciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ no pueden ser linealmente independientes, lo que nos lleva a una contradicción.

(b) implica (c) es trivial. La demostración de (c) implica (a) es análoga a la demostración del Teorema 4.3, cuando se comprueba que las funciones son linealmente independientes. ■

Ahora bien, seguimos todavía muy lejos de resolver un sistema homogéneo. De hecho, los métodos que permitirán dar soluciones explícitas a los sistemas planteados tendrán que esperar a los próximos temas. La teoría general, en lo que a la estructura de las soluciones, queda cerrada al establecer la siguiente caracterización de los sistemas no homogéneos.

Teorema 4.5 *El conjunto de soluciones del sistema*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \tag{4.3}$$

es de la forma

$$\mathbf{y} = c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + c_n \cdot \mathbf{y}_n + \mathbf{y}_p,$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$*,* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ *son soluciones linealmente independientes del problema homogéneo e* $\mathbf{y}_p$ *es una solución particular del problema no homogéneo.*

Demostración. Sea $\mathbf{y}_p$ una solucion particular del sistema (4.3) y sea $\mathbf{y}$ otra solución. Consideremos el vector de funciones $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_p$ y veamos que es solución del sistema homogéneo asociado a (4.3). Para ello calculamos

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \mathbf{y}' - \mathbf{y}_p' \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x) - [\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}_p + \mathbf{b}(x)] \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{y}_p] \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Por el Teorema 4.2, existen soluciones del sistema homogéneo asociado linealmente independientes $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ tales que

$$\mathbf{z} = c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + c_n \cdot \mathbf{y}_n,$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta la definición de $\mathbf{z}$ concluimos que

$$\mathbf{y} = c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + c_n \cdot \mathbf{y}_n + \mathbf{y}_p,$$

con lo que se concluye la demostración. ■

4.3 Teoría general para ecuaciones lineales de orden n

Una ecuación diferencial de orden $n > 1$ es una expresión de la forma

$$y^{n)} = f(x, y, y', ..., y^{n-1)}), \tag{4.4}$$

donde $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Esta ecuación puede transformarse en un sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno de la manera siguiente. Introducimos las variables dependientes $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$,...,$y_n = y^{n-1)}$ y entonces la ecuación (4.4) puede escribirse como el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ ... \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

Por ejemplo, la ecuación de orden tres

$$y^{3)} = x + yy' - y'',$$

puede escribirse como el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = x + y_1 y_2 - y_3. \end{cases}$$

De aqui se ve que para tener un problema de condiciones para la ecuación, necesitamos n condiciones iniciales $y_1(x_0) = y(x_0) = y_0$, $y_2(x_0) = y'(x_0) = y_0'$,...,$y_n(x_0) = y^{n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$, es decir, necesitamos conocer el valor de la función y de las sucesivas derivadas hasta la $n-1$ en un punto x_0. Entonces, en virtud del Teorema 4.1 vemos que si f es continua y las derivadas $\frac{\partial f}{\partial y_i}$, $1 \leq i \leq n$, son continuas, el problema de condiciones iniciales tiene solución única. Por ejemplo, el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y^{3)} = x + yy' - y'', \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2, \end{cases}$$

tiene solución única.

Nos ocuparemos expecialmente de ecuaciones diferenciales de orden n que llamaremos lineales y que a continuación describimos. Por una *ecuación diferencial lineal de orden n* entenderemos una expresión de la forma

$$a_n(x)y^{n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{4.5}$$

donde para $0 \leq i < n$, a_i y b son funciones reales de variable real definidas en un intervalo de la recta real I. Siempre que $a_n(x)$ sea diferente de cero, podemos escribir la ecuación como

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \tag{4.6}$$

donde $p_i(x) = a_i(x)/a_n(x)$, $0 \leq i < n$, y $q(x) = b(x)/a_n(x)$. Por ejemplo, las ecuaciones

$$y''' + x^2 y' = x,$$

$$y'' + 2y' + y = e^x,$$

$$y^{6)} - 7e^x y^{3)} + x^2 y'' + (\log x)y = 0$$

son ecuaciones lineales de órdenes tres, dos y seis, respectivamente. Como hemos visto anteriormente, una ecuación de orden n puede escribirse como el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ ... \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = q(x) - [p_{n-1}(x)y_n + ... + p_1(x)y_2 + p_0(x)y_1], \end{cases}$$

que en forma matricial se escribe como

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

donde

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -p_0(x) & -p_1(x) & -p_2(x) & -p_3(x) & ... & -p_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{b}(x) = (0, 0, ..., 0, q(x))^t$. Diremos entonces que la ecuación (4.5) es *homogénea* o *no homogénea* según se sea $\mathbf{b}(x)$ nulo o no, es decir, si $q(x) = 0$ para todo x. Además, la ecuación se dirá *de coeficientes constantes* cuando $\mathbf{A}(x)$ sea constante, es decir, cuando $p_i(x) = p_i \in \mathbb{R}$ para todo $0 \leq i < n$.

Tanto los Teoremas 4.3 y 4.5 como la Proposición 4.4 admiten la siguiente lectura en términos de ecuaciones lineales. A la vista de que cualquier ecuación lineal puede escribirse como un sistema añadiendo las derivadas como funciones, cualquier solución del sistema $\mathbf{y}$ es de la forma $(y, y', ..., y^{n-1})$, donde $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función suficientemente derivable. En esta línea, destacamos entonces que el wronskiano puede escribirse como

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2, ..., y_n](x) &= W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x) := |\mathbf{y}_1(x); \mathbf{y}_2(x); ...; \mathbf{y}_n(x)| \\ &= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_2(x) & y_n(x) \\ y_1'(x) & ... & y_2'(x) & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{n-1)}(x) & ... & y_2^{n-1)}(x) & y_n^{n-1)}(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

donde $y_1, y_2, ..., y_n$ son las primeras componentes de $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$. Podremos enunciar entonces los siguientes resultados.

Teorema 4.6 *El conjunto de soluciones de la ecuación homogénea*

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$, esto es, cualquier solución y de la misma es de la forma

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + ... + c_n \cdot y_n$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ son soluciones linealmente independientes del mismo.

Proposición 4.7 *Sean $y_1, y_2, ..., y_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soluciones de la ecuación homogénea*

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0.$$

Son equivalentes:

(a) $y_1, y_2, ..., y_n$ son linealmente independientes.

(b) $W[y_1, y_2, ..., y_n](x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

(c) Existe $x_0 \in I$ tal que $W[y_1, y_2, ..., y_n](x_0) \neq 0$.

Teorema 4.8 *El conjunto de soluciones de la ecuación*

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

es de la forma

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + ... + c_n \cdot y_n + y_p,$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2, ..., y_n$ son soluciones linealmente independientes del problema homogéneo e y_p es una solución particular del problema no homogéneo.

Capítulo 5

Resolución de ecuaciones lineales de orden n

Sumario. Ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes. Ecuación de Cauchy–Euler y Legendre. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes: método de reducción del orden. Ecuaciones no homogéneas: métodos de variación de constantes y coeficientes indeterminados.

Recordemos que una *ecuación diferencial lineal de orden* n es una expresión de la forma

$$a_n(x)y^{n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{5.1}$$

donde $a_n(x), ..., a_0(x)$ y $b(x)$ son funciones reales de variable real definidas sobre un intervalo abierto (a, b). En el caso de que $n = 1$ tenemos la ecuación lineal de orden uno estudiada anteriormente. Por otro lado, siempre que $a_n(x)$ sea distinto de cero, la ecuación anterior suele escribirse de la forma

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x), \tag{5.2}$$

donde $p_i(x) = a_i(x)/a_n(x)$ para $i = 0, 1, ..., n-1$ y $q(x) = b(x)/a_n(x)$. La ecuación (5.2) se dice *homogénea* si $q(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. En caso contrario ésta se dice *no homogénea.* Un ejemplo de ecuación homogénea es

$$y''' + xy'' + x^2 y = 0,$$

mientras que sería no homogénea la ecuación

$$y''' + xy'' + x^2 y = \log x.$$

Como sabemos, toda solución de la ecuación (5.2) es de la forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n + y_p,$$

donde son $y_1, y_2, ..., y_n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada, $c_1, c_2, ..., c_n$ son números reales e y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea. En esta tema vamos a ver cómo calcular dichas funciones para algunos tipos de ecuaciones lineales.

5.1 Ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes

Consideremos ecuaciones lineales de la forma de (5.2) donde $p_{n-1}, ..., p_1, p_0$ son constantes reales. Un ejemplo de este tipo de ecuaciones puede ser

$$y^{4)} - y''' + y'' + y = 0.$$

Vamos a ver cómo, de una manera bastante sencilla, es posible obtener todas las soluciones de esta ecuación diferencial. Para ello empezaremos estudiando la ecuación de orden dos.

5.1.1 Ecuación de orden dos

Consideramos una ecuación de orden dos de la forma

$$a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0,$$

que dado que $a_1 \neq 0$ (¿por qué alumno curioso?), puede escribirse como

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{5.3}$$

donde $a = a_2/a_1$ y $b = a_3/a_1$.

Para resolver esta ecuación proponemos una solución de la forma $y(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$. Una justificación para proponer esta solución viene de cómo son las soluciones de las ecuaciones lineales homogéneas de orden uno con coeficientes constantes. Si

$$y' + ay = 0$$

es tal ecuación, su solución es de la forma

$$y(x) = ce^{-ax}, \ c \in \mathbb{R}.$$

El buscar soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$ juega con la idea de que el aumento del orden no debe de cambiar sustancialmente la forma de la solución.

Para que $y(x) = e^{rx}$ sea solución de la ecuación (5.3) derivamos dos veces $y(x)$ y sustituimos es la ecuación, teniendo que

$$r^2e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0$$

o equivalentemente

$$e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0.$$

Como $e^{rx} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, necesariamente $r^2 + ar + b = 0$, es decir, r debe ser una raíz del polinomio $p(x) = x^2+ax+b$, que llamaremos polinomio característico de la ecuación (5.3). Entonces, para obtener las soluciones de la ecuación diferencial hemos de ser capaces de encontrar las raíces de $p(x)$, que es una cosa que somos capaces de hacer. Analizando las soluciones de $p(x) = x^2+ax+b = 0$ tenemos que distinguir los siguientes casos.

Dos raíces reales de multiplicidad uno

Consideremos la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ y supongamos que las raíces del polinomio $x^2 + ax + b$ son dos números reales que se obtienen calculando

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

y sean r_1 y r_2 tales raíces. Entonces las funciones $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + p_1 y' + p_0 = 0$. Si comprobamos que ambas soluciones son linealmente independientes, entonces toda solución de la ecuación homogénea será combinación lineal de ambas soluciones. Para ver que estas dos soluciones son realmente linealmente independientes es suficiente calcular el Wronskiano de ambas y ver que es distinto de cero. Dicho determinante es

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{r_1 x} e^{r_2 x} \neq 0$$

ya que $r_1 \neq r_2$ y las funciones $e^{r_1 x}$ y $e^{r_2 x}$ no se anulan nunca.

Por lo tanto toda solución de la ecuación $y'' + p_1 y' + p_0 = 0$ es de la forma

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},$$

donde c_1 y c_2 son dos números reales.

Por ejemplo, para calcular las soluciones de la ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

basta con calcular las raíces del polinomio $p(x) = x^2 - 3x + 2$, que son 1 y 2. Así las soluciones de la ecuación lineal anterior son

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Si lo que tenemos es un problema de condiciones iniciales como por ejemplo

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1, \; y'(0) = 0, \end{cases}$$

las soluciones de dicha ecuación se calculan, teniendo en cuenta que $y'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}$, e imponiendo las condiciones iniciales en la solución anterior

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 = c_1 + c_2 \\ y'(0) &= 0 = c_1 + 2c_2, \end{aligned}$$

con lo que $c_1 = 2$ y $c_2 = -1$, y la única solución del problema de condiciones iniciales anterior es de la forma

$$y(x) = 2e^x - e^{2x}.$$

No repetiremos este cálculo de las soluciones del problema de condiciones iniciales en los demás tipos de ecuaciones por ser totalmente análogos.

Una raíz real de multiplicidad dos

Consideremos la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ y supongamos que las raíces del polinomio $x^2 + ax + b$, calculando

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a}{2} = r$$

es una única raíz real de multiplicidad dos. Entonces sabemos que la función $y_1(x) = e^{rx}$ es solución de la ecuación lineal homogénea, pero necesitamos otra solución linealmente independiente para obtener todas las soluciones del mismo. Esta otra función va a ser $y_2(x) = xe^{rx}$. Dicha función verifica que

$$\begin{aligned} & y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x) \\ = \; & (2r + r^2x)e^{rx} + a(1 + rx)e^{rx} + bxe^{rx} \\ = \; & e^{rx}(2r + a) + xe^{rx}(r^2 + ar + b) = 0 \end{aligned}$$

usando que $r = -a/2$, y que $r^2 + ar + b = 0$ por ser r raíz del polinomio. Así la función $y_2(x) = xe^{rx}$ es solución de la ecuación lineal considerada.

Vamos a ver ahora que las soluciones $y_1(x) = e^{rx}$ e $y_2(x) = xe^{rx}$ son linealmente independientes. Para ello calculamos el Wronskiano

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ ae^{rx} & (1 + rx)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx} \neq 0,$$

con lo que ambas soluciones son linealmente independientes. Por tanto toda solución de la ecuación diferencial lineal es de la forma

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, para calcular las soluciones de la ecuación

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

basta calcular las raíces del polinomio $x^2 + 2x + 1$, que es la raíz doble -1. Por tanto las soluciones de dicha ecuación lineal son

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x},$$

con c_1 y c_2 dos números reales.

Dos raíces complejas conjugadas

Consideremos la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ y supongamos que las raíces del polinomio $x^2 + ax + b$ calculando

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

son dos raíces complejas conjugadas $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$, donde

$$\alpha = -\frac{a}{2} \tag{5.4}$$

y

$$\beta = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}. \tag{5.5}$$

Vamos a ver que las funciones $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ son dos soluciones de la ecuación lineal. Veámoslo con $y_1(x)$, ya que con $y_2(x)$ el proceso es análogo. Calculamos las dos primeras derivadas

$$y_1'(x) = e^{\alpha x}[\alpha\cos(\beta x) - \beta\sin(\beta x)],$$

$$y_1''(x) = e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2)\cos(\beta x) - 2\alpha\beta\sin(\beta x)],$$

y sustituimos en la ecuación diferencial

$$y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)$$

teniéndose

$$e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2)\cos(\beta x) - 2\alpha\beta\sin(\beta x)] + ae^{\alpha x}[\alpha\cos(\beta x) - \beta\sin(\beta x)] + be^{\alpha x}\cos(\beta x).$$

Agrupando convenientemente

$$e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b)\cos(\beta x) - (2\alpha\beta + a\beta)\sin(\beta x)].$$

Sustituyendo α y β por los valores obtenidos en (5.4) y (5.5) tenemos que

$$\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b = \frac{a^2}{4} - \frac{4b - a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = 0$$

y

$$2\alpha\beta + a\beta = 2\alpha\beta - 2\alpha\beta = 0,$$

con lo que

$$e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b)\cos(\beta x) - (2\alpha\beta + a\beta)\sin(\beta x)] = 0$$

y por tanto $y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial.

Una vez comprobado que ambas funciones son soluciones, vamos a ver que son linealmente independientes calculando su Wronskiano

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos(\beta x) - \sin(\beta x)) & e^{\alpha x}(\alpha\sin(\beta x) + \cos(\beta x)) \end{vmatrix} \\ &= e^{\alpha x}(\cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)) = e^{\alpha x} \neq 0. \end{aligned}$$

Entonces toda solución de la ecuación lineal homogénea es de la forma

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, para calcular las soluciones de la ecuación

$$y'' + 4y' + 5y = 0,$$

calculamos las raíces del polinomio $x^2 + 4x + 5$ que se calculan como

$$\frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{4}}{2} = -2 \pm 2i.$$

Entonces todas las soluciones de la ecuación lineal homogénea de orden dos anterior son de la forma

$$y(x) = c_1 e^{-2x} \cos(2x) + c_2 e^{-2x} \sin(2x),$$

donde c_1 y c_2 son dos números reales.

5.1.2 Ecuación de orden n

Partimos de la ecuación homogénea

$$y^{n)} + p_{n-1} y^{n-1)} + ... + p_1 y' + p_0 y = 0,$$

y suponemos que la función $y(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$, es solución de la misma. Derivando n veces dicha función y sustituyendo en la ecuación diferencial original tenemos que

$$0 = (r^n + p_{n-1} r^{n-1} + ... + p_1 r + p_0) e^{rx},$$

y dado que e^{rx} es siempre distinto de cero, tiene que verificarse que $r^n + p_{n-1} r^{n-1} + ... + p_1 r + p_0 = 0$, o sea que r sea una raíz del polinomio $P(x) = x^n + p_{n-1} x^{n-1} + ... + p_1 x + p_0$. Como los coeficientes del polinomio $p_{n-1}, ..., p_1, p_0$ son reales, tenemos que las únicas posibles raíces de dicho polinomio son números reales y números complejos conjugados. Entonces $P(x)$ puede descomponerse como

$$P(x) = (-1)^n (x - a_1)^{r_1} ... (x - a_j)^{r_j} (x^2 + A_1 x + B_1)^{s_1} ... (x^2 + A_j x + B_j)^{s_i},$$

donde $a_1, ..., a_j$ son las raíces reales del polinomio con sus multiplicidades $r_1, ..., r_j$, y cada polinomio de la forma $(x^2 + A_1 x + B_1)^{s_1}, ..., (x^2 + A_j x + B_j)^{s_j}$ tienen dos soluciones complejas conjugadas de multiplicidades $s_1, ..., s_j$. Entonces un conjunto de soluciones linealmente independientes de la ecuación considerada es el siguiente:

$$\begin{array}{l}
\{e^{a_1 x}, x e^{a_1 x}, ..., x^{r_1 - 1} e^{a_1 x}, ..., e^{a_j x}, x e^{a_j x}, ..., x^{r_j - 1} e^{a_j x}, \\
e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x), x e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x), ..., x^{s_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x), \\
e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x), x e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x), ..., x^{s_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
e^{\alpha_k x} \cos(\beta_k x), x e^{\alpha_k x} \cos(\beta_k x), ..., x^{s_k - 1} e^{\alpha_k x} \cos(\beta_k x), \\
e^{\alpha_k x} \sin(\beta_k x), x e^{\alpha_k x} \sin(\beta_k x), ..., x^{s_k - 1} e^{\alpha_k x} \sin(\beta_k x)\},
\end{array}$$

por lo que las soluciones de dicha ecuación diferencial serán combinaciones lineales de las funciones anteriores.

$$x^t e^{\alpha x} \cos(\beta x) \text{ ó } x^t e^{\alpha x} \sin(\beta x) \tag{5.6}$$

donde $0 \leq t < s$.

En el caso de ecuaciones lineales de mayor orden, el problema radica en la dificultad de resolver la ecuación algebraica asociada a la ecuación diferencial. Así, para calcular las soluciones de la ecuación

$$y^{6)} - 3y^{5)} - 5y^4 + 17y''' + 18y'' - 68y' + 40y = 0$$

debemos calcular las raíces del polinomio

$$x^6 - 3x^5 - 5x^4 + 17x^3 + 18x^2 - 68x + 40$$

que son 1 con multiplicidad uno, 2 con multiplicidad tres y $-2 \pm 2i$ con multiplicidad uno. Entonces las soluciones de dicha ecuación diferencial son de la forma

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x} + c_4 x^2 e^{2x} + c_5 e^{-2x}\cos(2x) + c_6 e^{-2x}\sin(2x),\ c_i \in \mathbb{R}.$$

5.2 Aproximación a las ecuaciones con coeficientes variables: Ecuaciones de Cauchy–Euler y de Legendre

Estas ecuaciones lineales pueden resolverse reduciéndolas a ecuaciones lineales de coeficientes constantes estudiadas con anterioridad. La ecuación de *Cauchy–Euler* es de la forma

$$x^n y^{n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{n-1)} + ... + a_1 x y' + a_0 y = b(x) \tag{5.7}$$

donde $a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. La ecuación de Legendre es de la forma

$$(\alpha x + \beta)^n y^{n)} + a_{n-1}(\alpha x + \beta)^{n-1}y^{n-1)} + ... + a_1(\alpha x + \beta)y' + a_0 y = b(x) \tag{5.8}$$

donde $\alpha, \beta, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. La ecuación (5.7) se obtiene como caso particular de (5.8) cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. En cualquier caso, el cambio de variable independiente de la forma $\alpha x + \beta = e^t$ transforma ambas ecuaciones en ecuaciones con coeficientes constantes, pudiéndose obtener las soluciones de la ecuación homogénea de la forma estudiada anteriormente. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x^2 y'' + \frac{11}{3} x y' - y = 0,\ x > 0. \tag{5.9}$$

El cambio de variable que debemos realizar es $x = e^t$. Entonces por la regla de la cadena

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{y}\,\frac{1}{x}$$

siendo $\dot{y}$ la derivada de y respecto de la nueva variable t y teniendo en cuenta que $t = \log x$. Calculamos la segunda derivada

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}\left(\dot{y}\,\frac{1}{x}\right) = \frac{d\,\dot{y}}{dx}\frac{1}{x} - \dot{y}\,\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{d\,\dot{y}}{dt}\frac{dt}{dx}\frac{1}{x} - \dot{y}\,\frac{1}{x^2} = \ddot{y}\frac{1}{x^2} - \dot{y}\,\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Sustituimos en la ecuación (5.9) y obtenemos

$$x^2\left(\ddot{y}\frac{1}{x^2} - \dot{y}\ \frac{1}{x^2}\right) + \frac{11}{3}x\,\dot{y}\ \frac{1}{x} - y = 0,$$

de donde dimplificando obtenemos la ecuación

$$\ddot{y} + \frac{8}{3}\,\dot{y}\ - y = 0, \tag{5.10}$$

dependiendo ahora y de la nueva variable t. Las soluciones de (5.10) son de la forma

$$y(t) = c_1 e^{t/3} + c_2 e^{3t} = c_1 (e^t)^{1/3} + c_2 (e^t)^{-3}$$

de donde deshaciendo el cambio, obtenemos para $x > 0$ la solución de (5.9)

$$y(x) = c_1 x^{1/3} + c_2 x^{-3}.$$

5.3 Ecuación lineal homogénea de coeficientes variables

En esta sección vamos a considerar las ecuaciones lineales homogéneas de orden dos con coeficientes variables. Vamos a ver como, una vez calculada una solución particular de dicha ecuación, es posible hallar otra solución linealmente independiente para construir todas las soluciones posibles.

Consideremos la ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0,$$

y supongamos que conocemos una solución particular no nula de la misma $y_1(x)$. A partir de esta solución particular intentaremos construir una nueva solución particular de la forma $y_2(x) = z(x)y_1(x)$, donde $z(x)$ es una función a determinar. Imponiendo que y_2 sea solución de dicha ecuación tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= z''(x)y_1(x) + 2z'(x)y_1'(x) + z(x)y_1''(x) + p_1(x)(z'(x)y_1(x) + z(x)y_1'(x)) + p_0(x)z(x)y_1(x) \\
&= z(x)(y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_0(x)y_1(x)) + z''(x)y_1(x) + z'(x)(2y_1'(x) + p_1(x)y_1(x)) \\
&= z''(x)y_1(x) + z'(x)(2y_1'(x) + p_1(x)y_1(x)),
\end{aligned}$$

puesto que $y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_0(x)y_1(x) = 0$ por ser solución de la ecuación lineal homogénea. Como vemos, la ecuación que nos queda es de la forma

$$z''y_1(x) + z'(2y_1'(x) + p_1(x)y_1(x)) = 0,$$

donde la variable dependiente es la función z'. Esta ecuación es lineal de orden uno y la manera de calcular las soluciones ya se vio en el capítulo anterior. Una vez obtenido $z'(x)$, calculamos por integración la función $z(x)$ y calculando

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1(x) & z(x)y_1(x) \\ y_1'(x) & z'(x)y_1(x) + z(x)y_1'(x) \end{vmatrix} \\
&= z'(x)y_1(x)^2.
\end{aligned}$$

Como $y_1(x)$ es una función no nula y $z'(x)$ es de la forma $e^{g(x)}$ (ver el tema donde se resuelve la ecuación lineal de primer orden), se tiene que el Wronskiano no se anula y por tanto y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes. Así todas las soluciones de la ecuación lineal homogénea de orden dos serán de la forma
$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$
con c_1 y c_2 constantes reales.

Por ejemplo, vamos a calcular las soluciones de la ecuación
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$
Como se puede comprobar la función $y_1(x) = x$ es una solución particular de dicha ecuación. Para obtener otra ecuación linealmente independiente con la anterior construimos la función $y_2(x) = y_1(x)z(x) = xz(x)$, e imponemos la condición de que sea solución de la ecuación diferencial que estamos considerando. Obtenemos entonces
$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)(xz''(x) + 2z'(x)) - 2x(xz'(x) + z(x)) + 2xz(x) \\ &= z''(x)x(1-x^2) + z'(x)(2-4x^2), \end{aligned}$$
teniendo entonces la ecuación
$$0 = z''(x)x(1-x^2) + z'(x)(2-4x^2).$$
Para calcular las soluciones de la misma separamos las variables y obtenemos
$$\frac{z''(x)}{z'(x)} = \frac{4x^2-2}{x(1-x^2)},$$
y entonces
$$\int \frac{z''(x)}{z'(x)} dx = \int \frac{4x^2-2}{x(1-x^2)} dx = -\log[x^2(x^2-1)] + C,$$
con lo que una solución particular de dicha ecuación será de la forma
$$z'(x) = \frac{1}{x^2(x^2-1)},$$
y así
$$z(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{2}\log(x+1) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right),$$
con lo que otra solución linealmente independiente de dicha ecuación es
$$y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
y las soluciones de dicha ecuación son de la forma
$$y(x) = c_1 x + c_2\left(1 + \frac{1}{2}x\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right),$$

con c_1 y c_2 dos números reales.

La principal dificultad de aplicar este método es encontrar la primera solución $y_1(x)$, ya que sin ésta no es posible obtener la segunda. Normalmente, si en algún ejercicio no se da la primera solución ésta debe ser sencilla, un polinomio, e^x y cosas por el estilo. Sin embargo, existe un gran número de ecuaciones diferenciales de orden dos de las que no se conoce su solución, es decir, no se es capaz de encontrar una solución particular. Obviamente, no estudiaremos esas ecuaciones aquí.

5.4 Ecuación lineal no homogénea

Vamos a desarrollar aquí dos técnicas para calcular las soluciones de la ecuación lineal no homogénea, tanto de coeficientes constantes como de coeficientes variables. En general como la ecuación de coeficientes variables engloba la ecuación de coeficientes constantes, consideraremos la ecuación con coeficientes variables. Uno de ellos sólo lo veremos para las ecuaciones de orden dos, mientras que el otro lo aplicaremos independientemente del orden de la ecuación.

Como las soluciones de una ecuación lineal no homogénea de la forma

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

son de la forma

$$y = c_1y_1 + ... + c_ny_n + y_p,$$

donde $y_h = c_1y_1 + ... + c_ny_n$ son las soluciones de la ecuación lineal homogénea e y_p es una solución particular de la ecuación lineal no homogénea, aquí vamos a ver métodos para conseguir precisamente dicha solución particular.

5.4.1 Variación de constantes.

Vamos a ver este método para las ecuaciones de orden dos. Consideramos por tanto la ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x), \tag{5.11}$$

y supongamos que las soluciones de la ecuación homogénea es de la forma

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

El método de los coeficientes variables consiste en suponer que la solución particular que estamos buscando es de la forma

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

donde $c_1(x)$ y $c_2(x)$ son funciones a determinar.

En una primera etapa para simplificar la segunda derivada de y_p, buscaremos funciones de forma que

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Con esto, tenemos que

$$y_p'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

y la segunda derivada

$$y_p''(x) = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)$$

Sustituyendo en la ecuación (5.11) tenemos que

$$\begin{aligned} q(x) &= c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) \\ &\quad + p_1(x)[c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)] + p_0(x)[c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)] \\ &= c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_1(x)[y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_0(x)y_1(x)] \\ &\quad + c_2(x)[y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_0(x)y_2(x)] \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación homogénea, obtenemos la simplificación

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = q(x).$$

Construimos entonces el sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = q(x), \end{cases}$$

del cual despejamos

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ q(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2](x)}, \\ c_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & q(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2](x)}, \end{aligned}$$

e integrando obtenemos las funciones c_1 y c_2 con las que construimos la solución particular.

Veámoslo con el siguiente ejemplo. Sea la ecuación

$$y'' + y = \sec x.$$

Como puede comprobarse fácilmente, la solución de la ecuación homogénea es de la forma

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Aplicamos el método de variación de constantes y obtenemos el sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0, \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \sec x. \end{cases}$$

Despejamos $c_1'(x) = -c_2'(x)\tan x$ y sustituimos para conseguir la ecuación

$$c_2'(x)(\sin x \tan x + \cos x) = \sec x,$$

y entonces

$$c_2(x) = \int \frac{\sec x}{(\sin x \tan x + \cos x)} dx = x + C$$

y

$$c_1(x) = \int -\tan x dx = \log(\cos x) + K,$$

y como buscamos soluciones particulares de la ecuación podemos tomar C y K iguales a cero y la solución particular es

$$y_p(x) = \log(\cos x)\cos x + x \sin x$$

y la solución de la ecuación lineal no homogénea es de la forma

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \log(\cos x)\cos x + x \sin x.$$

5.4.2 Método de los Coeficientes Indeterminados.

Este método es bastante útil para calcular soluciones particulares de ecuaciones con coeficientes constantes cuando el término $q(x)$ de la ecuación lineal no homogénea es suma de funciones de la forma

$$x^t e^{\alpha x} \cos(\beta x) \text{ ó } x^t e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En este caso, se considerarán soluciones particulares del problema no homogéneo sumas de la forma

$$(A_t x^t + ... + A_1 x + A_0) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + (B_t x^t + ... + B_1 x + B_0) e^{\alpha x} \sin(\beta x) \tag{5.12}$$

si $\alpha + i\beta$ no es solución de la ecuación característica asociada al problema homogéneo, y de la forma

$$(A_t x^t + ... + A_1 x + A_0) x^s e^{\alpha x} \cos(\beta x) + (B_t x^t + ... + B_1 x + B_0) x^s e^{\alpha x} \sin(\beta x) \tag{5.13}$$

si $\alpha + i\beta$ resulta ser solución de dicha ecuación con multiplicidad s.

El método de los coeficientes indeterminados consiste en determinar los coeficientes A_i y B_i suponiendo que (5.12) y (5.13) sean soluciones de la ecuación no homogénea. Ilustramos el método con un par de ejemplos. Consideramos la ecuación

$$y'' + y = x,$$

es decir $q(x)$ es un polinomio de grado uno. Suponiendo que $y_p(x) = Ax + B$, derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$0 + Ax + B = x,$$

de donde $A = 1$ y $B = 0$, por lo que la solución de la ecuación anterior es de la forma

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x.$$

Si ahora tenemos

$$y'' + y = e^{2x},$$

suponemos ahora que la solución particular es de la forma $y_p(x) = Ae^{2x}$, y el coeficiente a determinar es A. Derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$e^{2x}(4A + A) = e^{2x},$$

con lo que $A = 1/5$ y la solución particular es de la forma $y_p(x) = \frac{1}{5}e^{2x}$.

Considerando ahora la ecuación

$$y'' + y = \cos(3x),$$

hemos de probar con soluciones particulares de la forma $y_p(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$, donde ahora hemos de determinar A y B.

Si la ecuación es

$$y'' + y = e^{2x}\cos x,$$

la solución particular que hemos de buscar será una combinación de los dos casos anteriores, es decir, de la forma $y_p(x) = Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x$, mientras que si la ecuación es de la forma

$$y'' + y = e^{2x} + x^2,$$

la solución particular habrá que buscarla suponiendo que es de la forma $y_p(x) = Ae^{2x} + Bx^2 + Cx + D$, es decir la suma de una función exponencial y un polinomio de grado dos.

Finalmente, si ahora cosideramos la ecuación

$$y'' - 4y = e^{2x},$$

tiene por solución de la ecuación homogénea

$$y_h(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}.$$

Como e^{2x} es solución de la ecuación homogénea, no podemos proponer una solución de la forma $y_p(x) = Ae^{2x}$, si no que aplicando (5.13) suponemos ahora que la solución particular es de la forma $y_p(x) = Axe^{2x}$. Derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$e^{2x}4A = e^{2x},$$

con lo que $A = 1/4$ y la solución particular es de la forma $y_p(x) = \frac{1}{4}xe^{2x}$. Cuando aparecen funciones $q(x)$ que son soluciones de la ecuación homogénea asociada tenemos un fenómeno que se conoce con el nombre de resonancia y que, entre otros, es la base del funcionamiento de la radio. Estudiaremos más sobre el mismo en el siguiente tema.

5.5 Ejercicios

1. Resolver las siguientes ecuaciones homogéneas:

(a) $y'' + y' - 2y = 0$.	(b) $y'' - y' - 2y = 0$.	(c) $y'' + \lambda^2 y = 0$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
(d) $y'' - 2y' + y = 0$.	(e) $y'' - 4y' - 12y = 0$.	(f) $y'' + 2y' + y = 0$.
(g) $y'' + 2y' - 3y = 0$.	(h) $4y'' + 4y' + y = 0$.	(i) $2y'' - 3y' + y = 0$.
(j) $y'' + 2y' + y = 0$.	(k) $y'' + 6y' + 13y = 0$.	(l) $y'' + 4y = 0$.
(m) $y'' + 4y' + 5y = 0$.	(n) $y'' - 2y' + 6y = 0$.	(o) $y^{4)} - y'' - 2y = 0$.
(p) $y^{3)} - y'' + 2y' - 2y = 0$.	(q) $y^{4)} + y'' - 2y = 0$.	(r) $y^{6)} - 3y'' + 2y = 0$.

2. Resolver las siguientes ecuaciones no homogéneas:

(a) $y'' + y' - 2y = e^x$. (b) $y'' - y' - 2y = \cos x$. (c) $y'' - 2y' + y = 1$.
(d) $y'' + y = \sin x$. (e) $y'' - 4y' - 12y = x$. (f) $y'' + 2y' + y = x^2$.
(g) $y'' + 2y' - 3y = x^3$. (h) $4y'' + 4y' + y = xe^x$. (i) $2y'' - 3y' + y = x \sin x$.
(j) $y'' + 2y' + y = x \cos 2x$. (k) $y'' + 6y' + 13y = \sin 3x$. (l) $y'' + 4y' + 5y = e^x \cos x$.
(m) $y'' + 4y = e^{2x}$. (n) $y'' - 2y' + 6y = e^x + x$. (o) $y^{3)} - y'' + 2y' - 2y = x$.

3. Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

(a) $\left\{ \begin{array}{l} y'' + 2y' + y = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right.$ (b) $\left\{ \begin{array}{l} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array} \right.$ (c) $\left\{ \begin{array}{l} y'' - 4y' - 12y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right.$

(d) $\left\{ \begin{array}{l} y'' - 2y' + y = 1 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{array} \right.$ (e) $\left\{ \begin{array}{l} y'' - 4y' + y = x \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{array} \right.$ (f) $\left\{ \begin{array}{l} y'' + y = \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right.$

(g) $\left\{ \begin{array}{l} y^{3)} - y'' + 2y' - 2y = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{array} \right.$ (h) $\left\{ \begin{array}{l} y'' + y = \sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{array} \right.$ (i) $\left\{ \begin{array}{l} y'' - y' - 2y = \cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{array} \right.$

4. Dada $y_1(x)$ una solución particular de las ecuaciones siguientes, obtener la solución general:

(a) $xy'' + 3y' = 0;\ y_1(x) = 1$ (b) $x^2y'' + xy' - 4y = 0;\ y_1(x) = x^2$

(c) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0;\ y_1(x) = x$ (d) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0;\ y_1(x) = x^{-1/2}$

(e) $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0;\ y_1(x) = x$ (f) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0;\ y_1(x) = x$

5. Hallar la solución general de $y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$.

6. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$. (b) $2x^2y'' + 10xy' + 8y = 0$. (c) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$.

(d) $4x^2y'' - 3y = 0$. (e) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$.

7. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = xe^{-x}$ (b) $xy'' - (1 + x)y' + y = x^2e^{2x}$

(c) $(1 - x)y'' + xy' - y = (x - 1)^2$ (d) $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$

(e) $(x^2 - x)y'' + (2 - x^2)y' - (2 + x)y = x(x - 1)^2$

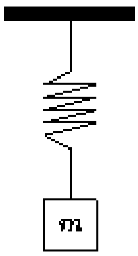
Capítulo 6

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de orden dos

Sumario. Vibraciones mecánicas. Circuito eléctrico LRC.

6.1 Oscilaciones mecánicas

Supongamos que tenemos un muelle del cual colgamos un cuerpo de masa m como muestra la figura



Si suponemos que el cuerpo está en equilibrio, por la 2^a ley de Newton se tiene que

$$F_m = P, \tag{6.1}$$

donde $F_m = -k\Delta y$ es la fuerza dada por la ley de Hooke (k es la constante del muelle que se opone a su extensión por el peso y Δy es el alargamiento producido en el muelle). De la ecuación (6.1) obtenemos la relación de equilibrio

$$-k\Delta y = mg, \tag{6.2}$$

donde g es la constante gravitatoria terrestre. Si ahora tiramos del cuerpo hacia abajo desplazándolo de su posición de equilibrio y lo soltamos, tenemos

$$F_m - P = my'', \tag{6.3}$$

donde ahora $F_m = -k(\Delta y + y)$ donde y es la separación del cuerpo de su posición de equilibrio. En ausencia de efectos de rozamiento, desarrollando la ecuación (6.3) obtenemos

$$-k(\Delta y + y) - mg = my''$$

y teniendo en cuanta la relación de equilibrio dada por (6.2) deducimos que el movimiento del cuerpo viene dado por la ecuación diferencial

$$my'' + ky = 0.$$

Nótese como el peso no aparece en la ecuación final. Esto es debido a que partimos de la condición de equilibrio y si partimos de esta condición las furzas debido al peso no van a aparecer en general en todas las ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales que generemos a partir de estos sistemas dados por muelles. De los contenidos del Tema 5 vemos fácilmente que la solución de la ecuación es de la forma

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \tag{6.4}$$

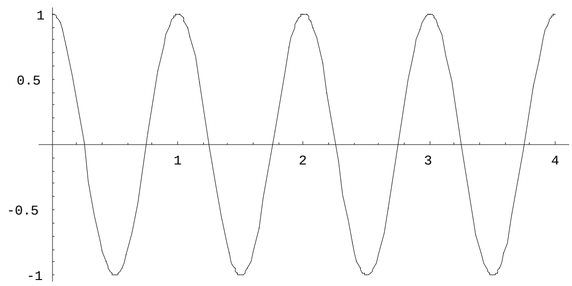
donde c_1, c_2 son dos constantes que dependen de las condiciones iniciales de la posición y la velocidad y $\omega = \sqrt{k/m}$ recibe el nombre de *periodo*. Haciendo el paso a coordenadas porlares $c_1 = A\cos\phi$ y $c_2 = A\sin\phi$, la ecuación (6.4) se escribe como

$$y(t) = A\cos\phi\cos(\omega t) + A\sin\phi\sin(\omega t) = A\sin(\omega t + \phi),$$

donde A recibe el nombre de *amplitud* y ϕ el de *fase o argumento inicial.* El movimiento descrito por estas ecuaciones se llama *movimiento oscilatorio simple*, y como puede observarse es periódico de periodo ω. Por ejemplo, si $\omega = 2\pi$ y las condiciones iniciales son $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, entonces la única solución del problema de condiciones iniciales es

$$y(t) = \cos(2\pi t)$$

que como sabemos tiene la gráfica



Supongamos a continuación suponemos que el cuerpo se encuentra sometido a una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad del móvil ($F_r = cy'$, $c > 0$). Por ejemplo, si el muelle y el cuerpo se encuentran sumergidos en algún tipo de líquido. Ahora la ley de Newton nos proporciona

$$F_m - P - F_r = my'',$$

de donde procediendo como en el caso anterior vemos que el movimiento del cuerpo vendrá descrito por la ecuación

$$my'' + cy' + ky = 0.$$

En este caso obtenemos las raíces

$$\alpha_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad y \quad \alpha_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

distinguiéndose la siguiente casuística.

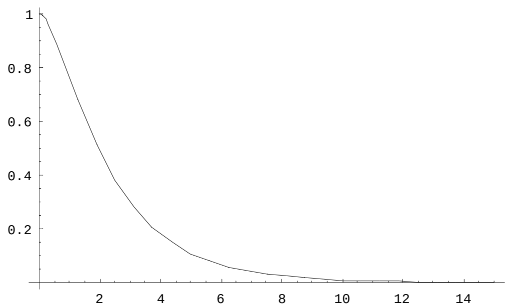
Si $c^2 - 4mk > 0$, las soluciones serían de la forma

$$y(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 y}$$

si $\alpha_1 \neq \alpha_2$, caso llamado *sobreamortiguado*. Por ejemplo, si $k = 2 = m$ y $c = 5$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ la solución es

$$y(t) = \frac{4}{3} e^{-t/2} - \frac{1}{3} e^{-2t}$$

cuya gráfica aproximada es



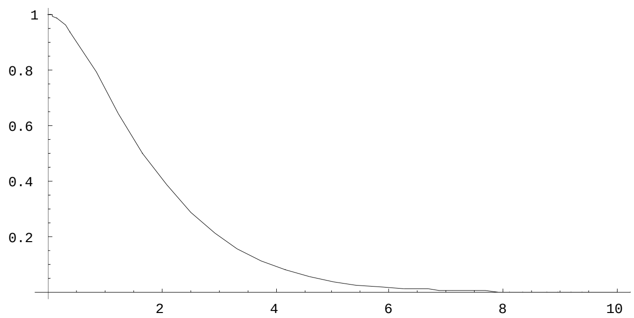
Si $c^2 - 4mk = 0$, las soluciones son de la forma

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\alpha y}$$

en el caso llamado *críticamente amortiguado* correspondiente a la situación $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = -c/2m$. En el caso particular en que $c = 4$, $m = k = 2$, con las condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ tenemos que la única solución es

$$y(t) = (1 + t) e^{-t},$$

cuya gráfica es



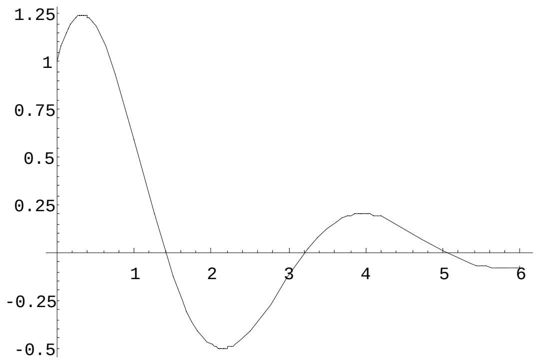
Por último, si $c^2 - 4mk < 0$, tendremos las raíces complejas conjugadas $\frac{-c}{2m} \pm i\omega$, donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$. La ecuación del movimiento ahora es de la forma

$$y(t) = e^{-\frac{ct}{2m}} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)] = e^{-\frac{ct}{2m}} A \sin(\omega t + \phi).$$

Este movimiento se va amortiguando debido a que la amplitud va decreciendo a cero cuando el tiempo se hace cada vez más grande y recibe el nombre de movimiento *subamortiguado*. Por ejemplo, para el caso $m = 1$, $c = 4$, y $k = 1$ y condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ la única solución es

$$y(t) = e^{-2t}[\cos(\sqrt{3}t) + 2/\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)]$$

cuya gráfica aproximada es



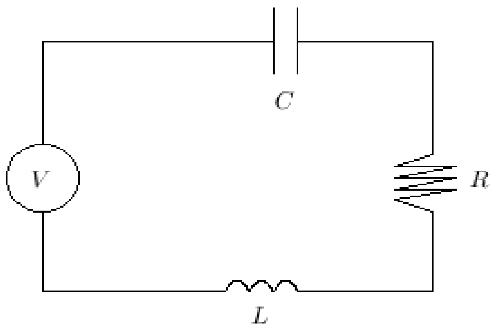
Si ahora además suponemos la presencia de una fuerza externa al sistema $F(t)$ actuando sobre nuestra masa puntual, el movimiento vendrá descrito por la ecuación diferencial no homogénea

$$my'' + cy' + ky = F(t). \tag{6.5}$$

Normalmente la fuerza será de la forma $F(t) = a\sin(\Omega t + \psi)$, donde $a, \Omega, \psi \in \mathbb{R}$, teniéndose entonces las *vibraciones forzadas*. Estudiaremos en las prácticas con Mathematica cómo son algunos tipos de vibraciones forzadas. Veremos que cuando $\Omega = \omega$ la amplitud de la vibración es máxima, dando lugar al fenómeno conocido como *resonancia*, de gran importancia desde el punto de vista técnico, ya que por ejemplo es un soporte teórico para la amplificación en la radio. Pondremos de manifiesto en las prácticas también el caso conocido como *casi–resonancia*, para valores de Ω próximos a ω.

6.2 Circuito eléctrico LRC

Consideremos un circuito eléctrico que lleve en serie una bobina de inductancia L, una resistencia R, un condensador de capacidad C y que es alimentado por una f.e.m. $V(t)$, según muestra la siguiente figura



Suponiendo que L, R y C son constantes, mediante física elemental se sabe que el voltaje generado $V(t)$ se consume en todos los elementos del circuito, es decir,

$$V(t) = V_C + V_R + V_L$$

donde V_C, V_R y V_L representan la diferencia de potencial entre el condensador, la resitencia y la bobina respectivamente. Sabiendo que

$$V_C = \frac{q(t)}{C},$$

donde $q(t)$ es la carga en cada instante de tiempo,

$$V_R = Rq'(t)$$

y

$$V_L = Lq''(t),$$

obtenemos la ecuación lineal de orden dos

$$Lq''(t) + Rq'(t) + q(t)/C = V(t). \tag{6.6}$$

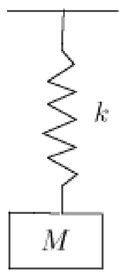
Teniendo en cuenta que la intensidad $i(t)$ se define como la derivada de la carga $q(t)$ obtenemos la ecuación en términos de la intensidad

$$Li''(t) + Ri'(t) + i(t)/C = V'(t) \tag{6.7}$$

Como puede apreciarse, las ecuaciones (6.6) y (6.7) son idénticas a la ecuación (6.5) que proviene de la vibración de un muelle. Así, cabe el mismo análisis para circuitos que hicimos en el apartado anterior.

6.3 Ejercicios

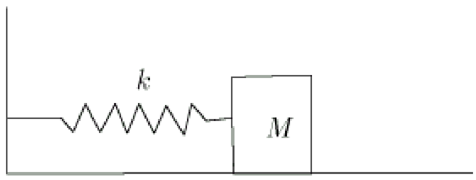
1. De un resorte elástico pegado al techo pende una masa de $3\mathrm{K}_g$ como muestra la figura siguiente. Si en estado de equilibrio el muelle se estira 1 m. respecto de su longitud inicial y suponemos nulo el efecto del rozamiento del aire, describir el movimiento descrito por el cuerpo producido al separarlo 1 m. respecto de su posición de equilibrio.



2. Si el muelle del ejercicio 1 se introduce en un liquido que produce una fuerza de frenado proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad $c = 1$, determinar ahora la ecuación del movimiento.

3. En las condiciones del ejercicio 2, determinar la ecuación del movimiento en el caso en que se aplica al cuerpo una fuerza externa $f(t) = \cos t\ N$.

4. Un cuerpo de masa M se ata a un resorte elástico según muestra la figura siguiente.



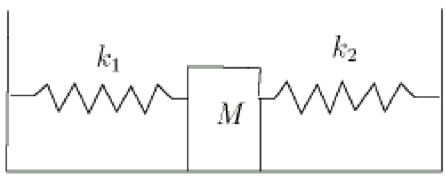
Se estira el muelle hasta dejarlo en posición de equilibrio y a continuación se desplaza x_0 $cm.$ de su posición de equilibrio. Despreciando la fuerza de rozamiento de la masa M con el suelo, determinar las ecuaciones del movimiento en caso de que:

(a) No actúa ninguna fuerza externa al sistema.
(b) Sobre el sistema actúa una fuerza externa $f(t)$.

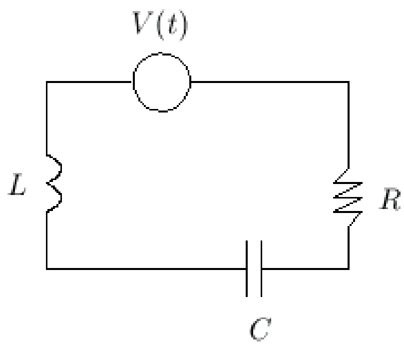
Aplicar el resultado teórico a los siguientes casos:

(a) $M = 5k_g.$; $k = 4N/cm.$; $x_0 = 1cm.$; $f(t) = 0$.
(b) $M = 1k_g.$; $k = 1N/cm.$; $x_0 = 0.5cm.$; $f(t) = e^t \cos t$.

5. Consideremos el cuerpo de la figura siguiente. Si la masa del cuerpo es M y las constantes de restauración de cada muelle son k_1 y k_2 y suponemos el cuerpo libre de rozamiento, determinar la ecuación de movimiento cuando desplazamos el cuerpo x_0 $cm.$ de su posición de equilibrio (suponemos despreciable la fuerza de rozamiento del cuerpo con la superficie).



6. Consideremos el circuito eléctrico de la figura.



Calcular la intensidad de corriente que pasa por los cables de dicho circuito en los siguientes casos, suponiendo que el circuito está descargado ($i(0) = i'(0) = 0$):

(a) $C = 1F$; $R = 1\Omega$; $L = 0H$; $V(t) = \sin t$.

(b) $C = 1F$; $R = 2\Omega$; $L = 0H$; $V(t) = e^t \cos(2t)$.

(c) $C = 2F$; $R = 3\Omega$; $L = 0H$; $V(t) = e^{3t}$.

(d) $C = 1F$; $R = 1\Omega$; $L = 1H$; $V(t) = \sin t$.

(e) $C = 0.5F$; $R = 1\Omega$; $L = 1H$; $V(t) = t^2$.

(f) $C = 0.25F$; $R = 4\Omega$; $L = 2H$; $V(t) = -t \cos t$.

Capítulo 7

Resolución de sistemas lineales de coeficientes constantes

Sumario. Teorema de Cayley–Hamilton. La exponencial de una matriz. Método práctico para resolver sistemas homogéneos. Sistemas no homogéneos: método de variación de constantes.

Vamos a considerar sistemas de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x), \tag{7.1}$$

donde $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n}$ es una matriz cuadrada, $\mathbf{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), ..., b_n(x))^t$ donde para $1 \leq j \leq n$, b_j son funciones reales definidas sobre un intervalo de la recta real I e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^t$. Los métodos que vamos a estudiar son matriciales por lo que es necesario tener frescos conceptos sobre la teoría de matrices y especialmente con la diagonalización de éstas.

7.1 Resolución del sistema homogéneo

Vamos a introducir un método matricial para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes que puede verse en [DeGr, pg. 384–402] o [Oma, 153–161] y que está basado en el cálculo de la exponencial de una matriz utilizando el Teorema de Cayley–Hamilton. Explicaremos en primer lugar en qué consiste el Teorema de Cayley–Hamilton y posteriormente introduciremos la exponencial de una matriz, que nos va a proporcionar la solución de sistemas homogéneos de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y},$$

donde $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n}$ es una matriz cuadrada.

7.1.1 Teorema de Cayley–Hamilton

Supongamos que $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n}$ es una matriz cuadrada y $q(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0$, es un polinomio de coeficientes reales. Si intercambiamos x por $\mathbf{A}$ construimos lo que denominaremos un polinomio matricial

$$q(\mathbf{A}) = a_k \mathbf{A}^k + a_{k-1} \mathbf{A}^{k-1} + ... + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}_n.$$

Nótese que el término independiente del polinomio aparece multiplicado por la matriz identidad $\mathbf{I}_n$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

y $q(x) = x^3 + 2x - 1$, entonces

$$\begin{aligned} q(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^3 + 2\mathbf{A} - \mathbf{I}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3 + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 38 & 58 \\ 87 & 125 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El Teorema de Cayley–Hamilton afirma lo siguiente.

Teorema 7.1 ***(Cayley–Hamilton).*** *Sea* $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\le i\le n}^{1\le j\le n}$ *una matriz cuadrada y sea* $p(x) = |\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n|$ *su polinomio característico. Entonces* $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$*.*

A modo de ejemplo, dada la matriz anterior, su polinomio característico es

$$p(x) = x^2 - 5x - 2,$$

y si calculamos

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Este teorema será clave para poder obtener una fórmula que permita resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

7.2 Resolución de sistemas. La exponencial de una matriz

En esta sección vamos a obtener una fórmula para resolver sistemas de ecuaciones de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}, \tag{7.2}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de coeficientes reales. Para esto, debemos recordar un caso particular de éste cuando la matriz es de una fila y una columna, es decir, cuando tenemos la ecuación lineal homogénea de orden uno

$$y' = ay, \; a \in \mathbb{R}.$$

En este caso, la solución general de esta ecuación es de la forma

$$y(x) = e^{ax}c, \; c \in \mathbb{R}.$$

Por analogía con el caso unidimensional, para el caso general la solución del sistema (7.2) va a ser de la forma

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{C},$$

donde $\mathbf{C}$ es un vector columna constante y $e^{\mathbf{A}\cdot x}$ es la exponencial de la matriz $\mathbf{A} \cdot x$ definida por la serie

$$e^{\mathbf{A}\cdot x} := \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \cdot \frac{x^i}{i!}.$$

Para hacer más comprensible este capítulo, vamos a dar algunas nociones sobre la exponencial de una matriz.

7.2.1 La exponencial de una matriz

Consideremos una matriz cuadrada $\mathbf{A}$. Como hemos definido anteriormente, la exponencial de dicha matriz viene definida, en analogía con la exponencial de un número real, viene dada por la serie

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \cdot \frac{1}{i!},$$

donde supondremos que $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$. Esta serie siempre es convergente, es decir, para toda matriz cuadrada con coeficientes reales la serie anterior nos proporciona una matriz de coeficientes reales.

Hay casos en los que es bastante sencillo calcular la exponencial de una matriz. Por ejemplo, si $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(d_1, ..., d_n)$ es una matriz diagonal, entonces para todo número natural i se tiene que $\mathbf{D}^i = \operatorname{diag}(d_1^i, ..., d_n^i)$ y entonces

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{D}} &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{D}^i \cdot \frac{1}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{diag}(d_1^i, ..., d_n^i) \cdot \frac{1}{i!} \\ &= \operatorname{diag}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_1^i}{i!}, ..., \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_n^i}{n!} \right) \\ &= \operatorname{diag}(e^{d_1}, ..., e^{d_n}). \end{aligned}$$

Por ejemplo, si

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$e^{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Además, la exponencial de una matriz cumple la siguientes propiedades (que no justificaremos). Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas que conmutan, esto es $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, entonces

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}. \tag{7.3}$$

Dado el vector columna $\mathbf{C}$, la función $\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}\cdot x}\cdot\mathbf{C}$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, es derivable y

$$\mathbf{y}'(x) = \frac{d}{dx}e^{\mathbf{A}\cdot x}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot e^{\mathbf{A}\cdot x}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{y}(x),$$

es decir, es solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (7.2).

Ahora bien, consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema es la matriz

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

pero ¿cómo calculamos dicha matriz? A continuación vamos a ver un método basado en el Teorema de Cayley–Hamilton que permite hacer el cálculo con cierta facilidad, aunque los cálculos sean laboriosos.

7.2.2 Cálculo práctico de la exponencial

Para fijar ideas supongamos que $p(x)$ es el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$ y que tiene k raíces reales o complejas $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_k$ con multiplicidades $r_1, r_2, ..., r_k$. Buscamos entonces polinomios $a_1(x), a_2(x), ..., a_k(x)$ con grado a lo sumo $r_i - 1$ para cada $1 \leq i \leq k$, de manera que se verifique la igualdad

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{a_1(x)}{(x-\lambda_1)^{r_1}} + \frac{a_2(x)}{(x-\lambda_2)^{r_2}} + ... + \frac{a_k(x)}{(x-\lambda_k)^{r_k}},$$

de donde

$$1 = a_1(x)q_1(x) + a_2(x)q_2(x) + ... + a_k(x)q_k(x), \tag{7.4}$$

con $q_i(x) = p(x)/(x-\lambda_i)^{r_i}$, $1 \leq i \leq k$. Sustituyendo en (7.4) x por $\mathbf{A}$ tendremos

$$\mathbf{I}_n = a_1(\mathbf{A})q_1(\mathbf{A}) + a_2(\mathbf{A})q_2(\mathbf{A}) + ... + a_k(\mathbf{A})q_k(\mathbf{A}). \tag{7.5}$$

Dado que para todo $1 \leq i \leq k$,

$$e^{\lambda_i x\cdot\mathbf{I}_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{I}_n^j \cdot \frac{(\lambda_i x)^j}{j!} = e^{\lambda_i x}\cdot\mathbf{I}_n,$$

entonces

$$e^{\mathbf{A}\cdot x} = e^{\lambda_i x\cdot\mathbf{I}_n} e^{(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n)\cdot x} = e^{\lambda_i x}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n)^j\cdot\frac{x^j}{j!}.$$

De aquí, multiplicando por la izquierda ambos miembros por $q_i(\mathbf{A})$

$$\begin{aligned} q_i(\mathbf{A})e^{\mathbf{A}\cdot x} &= e^{\lambda_i x}\cdot\sum_{j=0}^{\infty} q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n)^j\cdot\frac{x^j}{j!} \\ &= e^{\lambda_i x}\cdot\sum_{j=0}^{r_i-1} q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n)^j\cdot\frac{x^j}{j!} \end{aligned}$$

dado que por el Teorema de Cayley–Hamilton, para todo $j\geq r_i$ se tiene que $q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n)^j = p(\mathbf{A})(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n)^{j-r_i}=\mathbf{0}$. Multiplicando nuevamente por la izquierda por $a_i(\mathbf{A})$ obtendremos

$$a_i(\mathbf{A})q_i(\mathbf{A})e^{\mathbf{A}\cdot x} = e^{\lambda_i x}\cdot\sum_{j=0}^{r_i-1} a_i(\mathbf{A})q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n)^j\cdot\frac{x^j}{j!}. \tag{7.6}$$

Sumando (7.6) desde 1 hasta k y teniendo en cuenta (7.5) concluimos que la exponencial de la matriz puede calcularse con la fórmula

$$e^{\mathbf{A}\cdot x}=\sum_{i=1}^{k}\left(e^{\lambda_i x}\cdot a_i(\mathbf{A})q_i(\mathbf{A})\sum_{j=0}^{r_i-1}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n)^j\cdot\frac{x^j}{j!}\right). \tag{7.7}$$

Consideremos por ejemplo el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = 4y_1+2y_2; \\ y_2' = 3y_1+3y_2. \end{array}\right.$$

La matriz asociada al sistema es

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

y el polinomio característico

$$p(x)=x^2-7x+6,$$

que tiene por raíces $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=6$. Calculamos ahora a_1 y a_2 a partir de

$$\frac{1}{p(x)}=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-6}=\frac{(a_1+a_2)x-6a_1-a_2}{p(x)},$$

de donde obtenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a_1+a_2=0, \\ -6a_1-a_2=1, \end{array}\right.$$

que tiene por solución $a_1=-1/5$ y $a_2=1/5$. Además

$$q_1(x)=p(x)/(x-1)=x-6$$

y

$$q_2(x)=p(x)/(x-6)=x-1.$$

Aplicamos ahora la fórmula (7.7) y tenemos que

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}\cdot x} &= e^{x}(-1/5\mathbf{I}_2)\cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{A}-6\mathbf{I}_2)+e^{6x}(1/5\mathbf{I}_2)\cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2) \\ &= \frac{1}{5}\cdot \begin{pmatrix} 3e^{6x}+2e^{x} & 2e^{6x}-2e^{x} \\ 3e^{6x}-3e^{x} & 2e^{6x}+3e^{x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solución del sistema será

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} &= \frac{1}{5}\cdot \begin{pmatrix} 3e^{6x}+2e^{x} & 2e^{6x}-2e^{x} \\ 3e^{6x}-3e^{x} & 2e^{6x}+3e^{x} \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\cdot \begin{pmatrix} e^{6x}(3c_1+2c_2)+e^{x}(2c_1-2c_2) \\ e^{6x}(3c_1+2c_2)+e^{x}(-3c_1+3c_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

esto es

$$y_1(x)=\frac{1}{5}\left(e^{6x}(3c_1+2c_2)+e^{x}(2c_1-2c_2)\right)$$

e

$$y_2(x)=\frac{1}{5}\left(e^{6x}(3c_1+2c_2)+e^{x}(-3c_1+3c_2)\right),$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales. Si tuviésemos alguna condición inicial, por ejemplo, $y_1(0)=1,\ y_2(0)=0$, entonces planteando el sistema

$$\begin{aligned} y_1(0)=c_1=1, \\ y_2(0)=c_2=0, \end{aligned}$$

obtendríamos que

$$y_1(x)=\frac{1}{5}(3e^{6x}+2e^{x})$$

e

$$y_2(x)=\frac{1}{5}(3e^{6x}-3e^{x})$$

es la única solución de dicho problema de condiciones iniciales.

Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} y_1'=3y_1+y_2; \\ y_2'=-y_1+y_2; \end{cases}$$

cuyo polinomio característico asociado a la matriz $\mathbf{A}$ es $p(x)=x^2-4x+4$, que tiene por solución la raíz doble $\lambda=2$. Entonces

$$\frac{1}{p(x)}=\frac{a_1}{(x-2)^2}=\frac{a_1}{p(x)},$$

de donde $a_1=1$ y

$$q_1=p(x)/(x-2)^2=1.$$

Aplicando la fórmula (7.7) tenemos que

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}\cdot x} &= e^{2x}a_1(\mathbf{A})q_1(\mathbf{A})\sum_{i=0}^{1}(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_2)^i\cdot\frac{x^i}{i!} \\ &= e^{2x}\mathbf{I}_n\mathbf{I}_n\left(\mathbf{I}_n+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}x\right) \\ &= e^{2x}\left(\begin{pmatrix} 1+x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

con lo que la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+x)e^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & (1+x)e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales (la expresión definitiva de y_1 e y_2 se deja como ejercicio al lector).

Si por último tomamos el sistema

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 5y_2; \\ y_2' = y_1 - y_2; \end{cases}$$

podemos ver que el polinomio característico asociado a la matriz $\mathbf{A}$ es $p(x) = x^2 - 2x + 2$ que tiene por raíces los números complejos conjugados $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = 1 - i$. De la expresión

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{a_1}{(x-1-i)} + \frac{a_2}{(x-1+i)} = \frac{(a_1+a_2)x + a_1(-1+i) + a_2(-1-i)}{p(x)},$$

que da lugar al sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_1(-1+i) + a_2(-1-i) = 1, \end{cases}$$

que nos da como solución $a_1 = \frac{1}{2i}$ y $a_2 = -\frac{1}{2i}$. Teniendo en cuenta que

$$q_1(x) = x - 1 + i,$$

y

$$q_2(x) = x - 1 - i,$$

se tiene aplicando la fórmula (7.7)

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}\cdot x} &= e^{(1+i)x}\frac{1}{2i}\cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{A} - (1-i)\mathbf{I}_2) - e^{(1-i)x}\frac{1}{2i}\cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{A} - (1+i)\mathbf{I}_2) \\
&= e^x\left(e^{ix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2+i & -5 \\ 1 & -2+i \end{pmatrix} - e^{-ix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix}\right) \\
&= e^x\begin{pmatrix} 2\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} + \dfrac{e^{ix}+e^{ix}}{2} & -5\dfrac{e^{ix}-e^{ix}}{2i} \\ \dfrac{e^{ix}-e^{ix}}{2i} & -2\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} + \dfrac{e^{ix}+e^{ix}}{2} \end{pmatrix} \\
&= e^x \cdot \begin{pmatrix} 2\sin x + \cos x & -5\sin x \\ \sin x & -2\sin x + \cos x \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

dado que

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

y

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Entonces toda solución del sistema viene dada por la expresión

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = e^x \cdot \begin{pmatrix} 2\sin x + \cos x & -5\sin x \\ \sin x & -2\sin x + \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.

Los tres ejemplos anteriores resumen los casos que pueden darse para el caso de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir, que el polinomio característico tenga dos soluciones reales distintas, una real doble o dos complejas conjugadas. Cuando el número de ecuaciones es mayor, pueden aparecer otros casos, pero básicamente la matriz exponencial contiene en sus coordenadas funciones de la forma

$$x^n e^{\alpha x} \cos(\beta x) \text{ y } x^n e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

donde $n \geq 0$ y α y β son números reales. En cualquier caso, resolveremos sistemas que a lo sumo tienen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, pues a partir de ese número de ecuaciones los cálculos suelen ser muy largos y engorrosos en general.

7.3 El método de variación de constantes

Volvamos ahora sobre el sistema no homogéneo (7.1) y supongamos conocida la solución general del sistema homogéneo asociado. Para terminar de resolver el sistema no homogéneo usaremos el método de variación de constantes. Para ello supongamos que la solución es de la forma

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{C}(x),$$

donde $\mathbf{C}(x)$ es una función a determinar. Derivando respecto de x obtendremos que

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{C}(x) + e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{C}'(x) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(x) + e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{C}'(x).$$

Sustituyendo en el sistema no homogéneo tendremos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(x) + e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{C}'(x) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x),$$

o equivalentemente

$$e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{C}'(x) = \mathbf{b}(x).$$

Dado que la matriz $e^{\mathbf{A}\cdot x}$ es invertible (recordar la Proposición 4.4) y teniendo en cuenta que

$$e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot e^{-\mathbf{A}\cdot x} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}_n,$$

concluimos que $e^{-\mathbf{A}\cdot x}$ es la inversa de $e^{\mathbf{A}\cdot x}$ y entonces

$$\mathbf{C}(x) = \int e^{-\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{b}(x) dx. \tag{7.8}$$

Una vez calculada $\mathbf{C}(x)$ obtenemos la solución del sistema no homogéneo.

Por ejemplo, consideremos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = 4y_1 + 2y_2 + e^x; \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2, \end{array}\right.$$

que también podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ya vimos que la exponencial de la matriz del sistema era

$$e^{\mathbf{A}\cdot x} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 2e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix}$$

por lo que a partir de (7.8) obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} &= \int \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^{-6x} + 2e^{-x} & 2e^{-6x} - 2e^{-x} \\ 3e^{-6x} - 3e^{-x} & 2e^{-6x} + 3e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} dx \\ &= \frac{1}{5} \int \begin{pmatrix} 3e^{-5x} + 2 \\ 3e^{-5x} - 3 \end{pmatrix} dx \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \int (3e^{-5x} + 2) dx \\ \int (3e^{-5x} - 3) dx \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3e^{-5x}/5 + 2x + c_1 \\ -3e^{-5x}/5 - 3x + c_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con lo que la solución

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 2e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3e^{-5x}/5 + 2x + c_1 \\ -3e^{-5x}/5 - 3x + c_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 2e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{25} e^x \cdot \begin{pmatrix} 10x - 3 \\ 3 - 15x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nótese que una solución particular del sistema es

$$\mathbf{y}_p(x) = \frac{1}{25} e^x \cdot \begin{pmatrix} 10x - 3 \\ 3 - 15x \end{pmatrix},$$

por lo que haciendo $k_i = c_i/5$, $i = 1, 2$, tenemos que

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}\cdot x} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \mathbf{y}_p(x),$$

tal y como el Teorema 4.5 afirmaba.

Si por ejemplo consideramos el problema de condiciones iniciales

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = 4y_1 + 2y_2 + e^x; \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2; \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1; \end{array}\right.$$

se verificará que

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

de donde

$$c_1 = 3$$

y

$$c_2 = 22,$$

de donde sustituyendo en la solución general concluimos que

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 13e^{6x} + e^x(10x - 13) \\ 13e^{6x} + e^x(12 - 15x) \end{pmatrix}$$

es la única solución de dicho problema de condiciones iniciales.

7.4 Ejercicios

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

donde la matriz $\mathbf{A}$ es la siguiente:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(g)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(h)} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(i)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x' = -4(x+y) \\ x' + 4y' = -4y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -3y - x \\ x(0) = 6,\ y(0) = -2. \end{cases}$$

$$\text{(d)} \begin{cases} x' = x - z \\ y' = 2y \\ z' = x + z \\ x(0) = -2,\ y(0) = 2,\ z(0) = -1. \end{cases} \quad \text{(e)} \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + z \\ z' = -x - y \\ x(0) = y(0) = z(0) = -1. \end{cases}$$

3. Resolver los siguientes sistemas y problemas de condiciones iniciales

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{c} x' = y + te^{2t} \\ y' = -2x + 3y + e^{2t} \\ x(0) = 1,\ y(0) = -1. \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 4x + 3y + 5z + e^t \sin 2t \\ y' = -y - 4z \\ z' = 2y + 3z \end{array} \right.$$

$$\text{(c) } \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{c} x' = 2x + y - z \\ y' = -3x - y + z + t \\ z' = 9x + 3y - 4z \\ x(0) = z(0) = 0,\ y(0) = 3. \end{array} \right.$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{c} x' = -2x - 5y + t \\ y' = x + 2y + t^2 \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{array} \right. \qquad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix} \\ x(0) = -1,\ y(0) = 0. \end{array} \right.$$

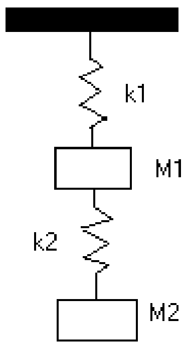
Capítulo 8

Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Sumario. Vibraciones mecánicas con varios cuerpos acoplados. Circuitos eléctricos. Problemas de mezclas con varios recipientes interconectados. Climatización de edificios con varias estancias.

8.1 Vibraciones mecánicas

Al estudiar sistemas mecánicos en los que aparecen varios cuerpos, como el que muestra la figura



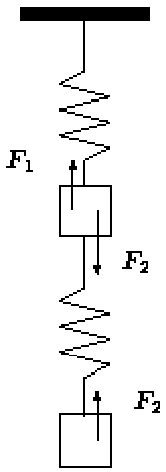
aparecen de una manera natural sistemas de ecuaciones diferenciales lineales como las que permiten estudiar el movimiento de tales cuerpos. Suponemos que los cuerpos están en equilibrio, es decir, no hay movimiento y los pesos de cada cuerpo se compensan con la fuerza de cada muelle proporcionada por la ley de Hooke (ver por ejemplo la ecuación del muelle deducida a partir del equilibrio en el Tema 6). Tiramos del cuerpo M_2 hacia abajo, produciéndose también un desplazamiento de M_1, y a continuación soltamos el cuerpo M_2, produciéndose así un movimiento. Si suponemos que no hay fuerzas debidas al rozamiento y denotamos por F_1 la fuerza recuperadora del primer muelle y F_2 la del segundo, tenemos por la segunda ley de Newton la ecuación

$$M_2 y_2'' = F_2,$$

donde y_2 es lo que se ha separando el cuerpo M_2 de la posición de equilibrio. Para el cuerpo M_1 tenemos la siguiente ecuación de movimiento

$$M_1 y_1'' = F_1 - F_2,$$

según el siguiente esquema de fuerzas, suponiendo que el movimiento de ambos cuerpos es hacia arriba y que ambos muelles están estirados, por lo que la fuerza recuperadora tiende a contraerlos.



Ahora bien, por la ley de Hooke, $F_1 = -k_1 y_1$, donde y_1 es el desplazamiento del primer cuerpo respecto de la posición de equilibrio. Por otro lado, $F_2 = -k_2(y_2 - y_1)$, dado que el estiramiento del segundo muelle es $y_2 - y_1$. Las ecuaciones de movimiento son entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 y_1'' = -(k_1 + k_2) y_1 + k_2 y_2, \\ M_2 y_2'' = k_2 y_1 - k_2 y_2. \end{array} \right.$$

Introduciendo las variables dependientes $z_1 = y_1'$ y $z_2 = y_2'$ y dividiendo por las masas obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = z_1, \\ z_1' = -\dfrac{k_1 + k_2}{M_1} y_1 + \dfrac{k_2}{M_1} y_2, \\ y_2' = z_2, \\ z_2' = \dfrac{k_2}{M_2} y_1 - \dfrac{k_2}{M_2} y_2, \end{array} \right.$$

cuya matriz es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{M_1} & 0 & \dfrac{k_2}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{M_2} & 0 & -\dfrac{k_2}{M_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si el sistema de muelles hubiera estado en un tanque con un líquido, apareciendo entonces una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad c_1 para el primer cuerpo y c_2 para el segundo, tendríamos ahora por la ley de Newton

$$\begin{cases} M_1 y_1'' = F_1 - F_2 - F_{r1}, \\ M_2 y_2'' = F_2 - F_{r2}, \end{cases}$$

donde F_{r1} y F_{r2} denotan las fuerzas de rozamiento. Entonces

$$\begin{cases} M_1 y_1'' = -(k_1 + k_2) y_1 + k_2 y_2 - c_1 y_1', \\ M_2 y_2'' = k_2 y_1 - k_2 y_2 - c_2 y_2', \end{cases}$$

y procediendo como antes

$$\begin{cases} y_1' = z_1, \\ z_1' = -\dfrac{k_1 + k_2}{M_1} y_1 - \dfrac{c_1}{M_1} z_1 + \dfrac{k_2}{M_1} y_2, \\ y_2' = z_2, \\ z_2' = \dfrac{k_2}{M_2} y_1 - \dfrac{k_2}{M_2} y_2 - \dfrac{c_2}{M_2} z_2, \end{cases}$$

cuya matriz del sistema es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{M_1} & -\dfrac{c_1}{M_1} & \dfrac{k_2}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{M_2} & 0 & -\dfrac{k_2}{M_2} & -\dfrac{c_2}{M_2} \end{pmatrix}.$$

Si además aparecen otras fuerzas externas actuando sobre alguno de los cuerpos, por ejemplo una fuerza $F(t)$ actuando sobre el segundo cuerpo, las ecuaciones de movimiento serían

$$\begin{cases} M_1 y_1'' = F_1 - F_2 - F_{r1}, \\ M_2 y_2'' = F_2 - F_{r2} + F(t), \end{cases}$$

que da lugar al sistema

$$\begin{cases} y_1' = z_1, \\ z_1' = -\dfrac{k_1 + k_2}{M_1} y_1 - \dfrac{c_1}{M_1} z_1 + \dfrac{k_2}{M_1} y_2, \\ y_2' = z_2, \\ z_2' = \dfrac{k_2}{M_2} y_1 - \dfrac{k_2}{M_2} y_2 - \dfrac{c_2}{M_2} z_2 + F(t), \end{cases}$$

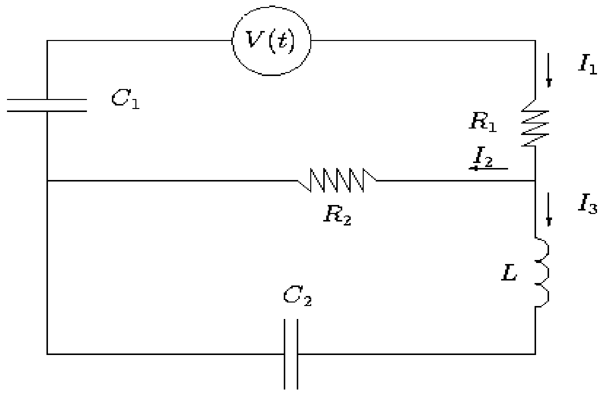
que en forma matricial es de la forma

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ z_1' \\ y_2' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{M_1} & -\dfrac{c_1}{M_1} & \dfrac{k_2}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{M_2} & 0 & -\dfrac{k_2}{M_2} & -\dfrac{c_2}{M_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F(t) \end{pmatrix}.$$

En los ejercicios del final del tema pueden verse otros sistemas unidos por muelles, que también dan lugar a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

8.2 Circuitos eléctricos con varias ramas

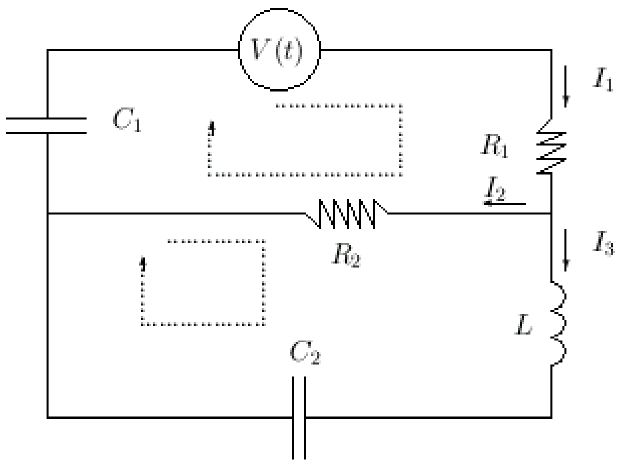
Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales también aparecen cuando consideramos circuitos eléctricos con varias ramas, como muestra la siguiente figura:



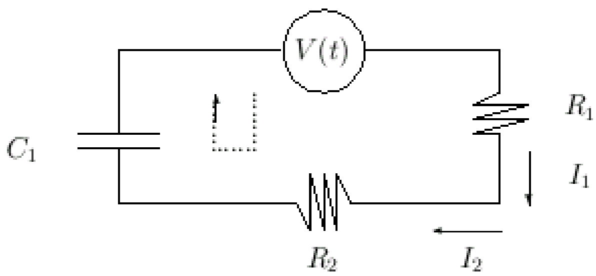
En este caso debemos aplicar las leyes de Kirchoff para obtener las ecuaciones. La primera de ellas afirma que en cada nudo o punto de remificación del circuito, la suma de las intensidades entrantes es igual a la suma de las intensidades salientes. En el circuito de la figura esto nos proporciona la ecuación

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

En segundo lugar, consideramos los dos subcircuitos que hay y fijamos un sentido de la corriente, como muestra la siguiente figura



Tomamos el primer subcircuito por separado, que es



Para este subcircuito tenemos la ecuación

$$V(t) = V_{C_1} + V_{R_1} + V_{R_2}$$

donde

$$V_{C_1} = \frac{q_1}{C_1},$$

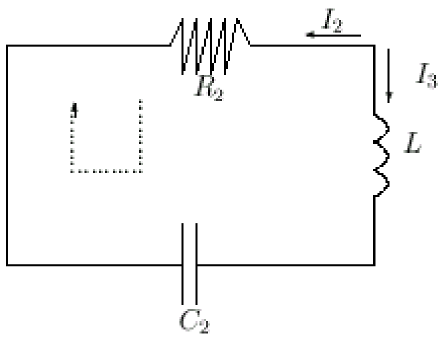
donde q_1 es la carga que da lugar a la intensidad I_1,

$$\begin{aligned} V_{R_1} &= I_1 R_1, \\ V_{R_2} &= I_2 R_2. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que las intensidades I_1 e I_2 llevan el sentido que nosotros hemos prefijado, y tomando la derivada primera, tenemos la ecuación

$$V'(t) = I_1' R_1 + I_1/C_1 + I_2' R_2.$$

Tomamos ahora el segundo subcircuito que muestra la figura



cuya ecuación será

$$0 = -V_{R_2} + V_L + V_{C_2},$$

teniendo en cuenta que ahora I_2 va en sentido contrario a prefijado por nosotros al principio y de ahí el signo negativo. Procediendo como antes obtenemos la ecuación

$$0 = -I_2' R_2 + I_3'' L + I_3/C_2,$$

y combinando las tres ecuaciones tenemos el sistema

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3, \\ V'(t) = I_1' R_1 + I_1/C_1 + I_2' R_2, \\ 0 = -I_2' R_2 + I_3'' L + I_3/C_2. \end{cases}$$

Eliminando I_1 tenemos las dos ecuaciones

$$\begin{cases} V'(t) = I_2'(R_1 + R_2) + I_3' R_1 + I_2/C_1 + I_3/C_1, \\ 0 = -I_2' R_2 + I_3'' L + I_3/C_2, \end{cases}$$

e introduciendo la variable $z = I_3'$, el sistema queda

$$\left\{\begin{array}{l} V'(t) = I_2'(R_1 + R_2) + zR_1 + I_2/C_1 + I_3/C_1, \\ I_3' = z \\ 0 = -I_2'R_2 + z'L + I_3/C_2. \end{array}\right.$$

Despejamos I_2', I_3' y z' y tenemos el sistema en la forma

$$\left\{\begin{array}{l} I_2' = -\dfrac{1}{C_1(R_1+R_2)}I_2 - \dfrac{1}{C_1(R_1+R_2)}I_3 - \dfrac{R_1}{R_1+R_2}z + \dfrac{V'(t)}{R_1+R_2}, \\ I_3' = z, \\ z' = -\dfrac{R_2}{C_1L(R_1+R_2)}I_2 - \left(\dfrac{R_2}{C_1L(R_1+R_2)} + \dfrac{1}{LC_2}\right) I_3 - \dfrac{R_2R_1}{L(R_1+R_2)}z + \dfrac{R_2V'(t)}{L(R_1+R_2)}, \end{array}\right.$$

que en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} I_2' \\ I_3' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{V'(t)}{R_1+R_2} \\ 0 \\ \dfrac{R_2V'(t)}{L(R_1+R_2)} \end{pmatrix}.$$

donde

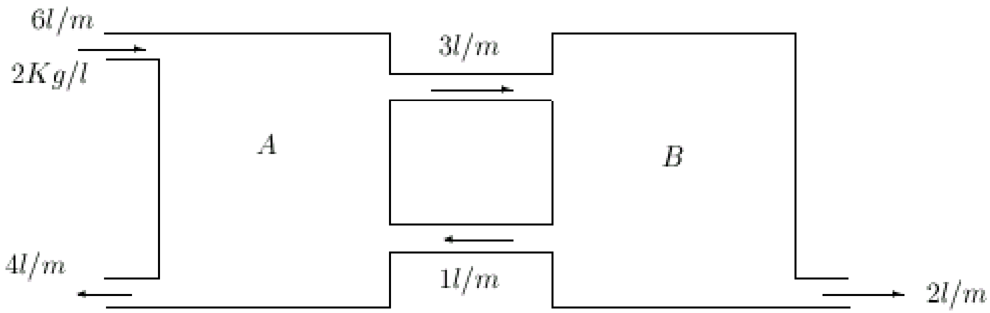
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{C_1(R_1+R_2)} & -\dfrac{1}{C_1(R_1+R_2)} & -\dfrac{R_1}{R_1+R_2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{R_2}{C_1L(R_1+R_2)} & -\dfrac{R_2}{C_1L(R_1+R_2)} - \dfrac{1}{LC_2} & -\dfrac{R_2R_1}{L(R_1+R_2)} \end{pmatrix}$$

Otros circuitos similares serán estudiados en los problemas de este tema.

8.3 Problemas de mezclas con varios recipientes

Supongamos que tenemos dos recipientes conteniendo ambos una cierta sustancia en disolución. Podemos pensar por ejemplo en agua salada. Los recipientes estan conectados entre sí, de manera que puede pasar cierta cantidad de sustancia de un recipiente al otro y viceversa. Además, cada recipiente puede estar en contacto con el exterior, permitiendo que entren sustancias del exterior y dejando salir también sustancias de los recipientes al exterior. En este tipo de problemas se trata de determinar la concentración de sustancia disuelta en cada recipiente. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.1 Dos grandes tanques, cada uno con 100 litros de líquido se encuentran interconectados por medio de tubos. El líquido fluye del tanque A (ver dibujo posterior) hacia el tanque B a razón de $3\, l/m$ y de B hacia A a razón de $1\, l/m$. El líquido contenido en el interior de cada tanque se mantiene bien agitado. Una solución de salmuera con una concentración de $2\, Kg/l$ fluye del exterior hacia el tanque A a razón de $6\, l/m$. La solucición (diluida) fluye hacia el exterior del tanque A a razón de $4\,l/m$ del tanque B a $2\,l/m$. Si inicialmente el tanque A contenía agua pura y el B $200\,kg$ de sal, determinar la cantidad de sal en cada instante.



Para resolver el problema, llamemos $x(t)$ e $y(t)$ las cantidades de sal en cada instante en los tanques A y B, respectivamente. Recordemos los problemas de mezclas con un único recipiente vistos en el Tema 3. De estos problemas, vemos que la variación de la cantidad de sal en A es

$$x'(t) = v_e - v_s$$

donde v_e es la velocidad de entrada de sal y v_s es la velocidad de salida. Para el caso del tanque A se tiene que

$$v_e = 6\,l/m \cdot 2\,Kg/l + 1\,l/m \cdot \frac{y(t)}{100}\,Kg/l$$

y

$$v_s = 4\,l/m \cdot \frac{x(t)}{100}\,Kg/l + 3\,l/m \cdot \frac{x(t)}{100}\,Kg/l = 7\,l/m \cdot \frac{x(t)}{100}\,Kg/l$$

de donde obtenemos la ecuación diferencial

$$x'(t) = -\frac{7}{100}x(t) + \frac{1}{100}y(t) + 12.$$

Procediendo de igual manera con el tanque B se tiene que

$$y'(t) = v_e - v_s$$

donde ahora

$$v_e = 3\,l/m \cdot \frac{x(t)}{100}\,Kg/l$$

y

$$v_s = 1\,l/m \cdot \frac{y(t)}{100}\,Kg/l + 2\,l/m \cdot \frac{y(t)}{100}\,Kg/l = 3\,l/m \cdot \frac{y(t)}{100}\,Kg/l,$$

de donde obtenemos la ecuación

$$y'(t) = \frac{3}{100}x(t) - \frac{3}{100}y(t),$$

y por consiguiente el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{7}{100}x(t) + \dfrac{1}{100}y(t) + 12, \\ y'(t) = \dfrac{3}{100}x(t) - \dfrac{3}{100}y(t), \\ x(0) = 0;\ y(0) = 200. \end{cases}$$

El sistema es no autónomo, y puede escribirse de forma matricial como

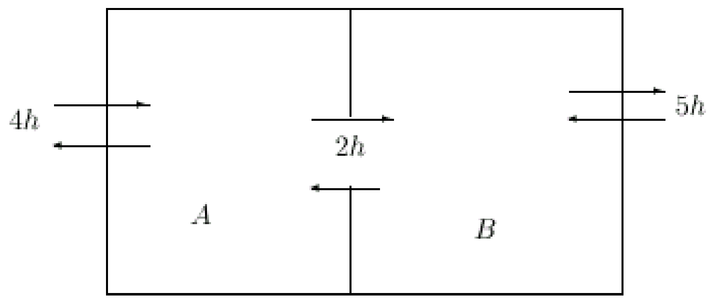
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dejamos la resolución del sistema al alumno. Otros problemas de este tipo se propondrán al final del tema.

8.4 Climatización de edificios con varias estancias

También en el Tema 3 vimos una aplicación de las ecuaciones diferenciales a la climatización de edificios con una sola estancia. Esta aplicación se basaba en la ley de enfriamiento de los cuerpos de Newton. Vamos a ver qué pasa si el edificio tiene más de una estancia, como el del siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.2 Un edificio consta de dos zonas A y B (veáse la siguiente figura). La zona A es calentada por un calefactor que genera $80000\,Kcal/h$. La capacidad calorífica de la zona A es de $1/4\,^oC$ por cada 1000 $Kcal$. Las constantes de tiempo de transferencia de calor son entre la zona A y el esterior 4 horas, 2 horas entre las zonas A y B y 5 horas entre la zona B y el exterior. Si la temperatura exterior es de $0\,^oC$, determinar la temperatura de cada zona.



Para resolver el problema, llamemos $x(t)$ e $y(t)$ a las temperaturas de las zonas A y B, respectivamente. Entonces

$$x'(t) = \frac{1}{4}(0 - x(t)) + \frac{1}{2}(y(t) - x(t)) + U(t),$$

donde

$$U(t) = \frac{1}{4}\,^oC/1000\,Kcal \cdot 80.000\,Kcal/h = 20\,^oC/h,$$

de donde conseguimos la ecuación

$$x'(t) = -\frac{3}{4}x(t) + \frac{1}{2}y(t) + 20.$$

Por otra parte, para la zona B tenemos

$$y'(t) = \frac{1}{5}(0 - y(t)) + \frac{1}{2}(x(t) - y(t)),$$

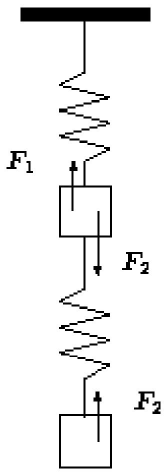
con lo que tenemos el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{3}{4}x(t) + \frac{1}{2}y(t) + 20, \\ y'(t) = \frac{1}{2}x(t) - \frac{7}{10}y(t). \end{cases}$$

Dejamos la resolución del sistema al alumno. Otros ejemplos de este tipo serán estudiados en los ejercicios.

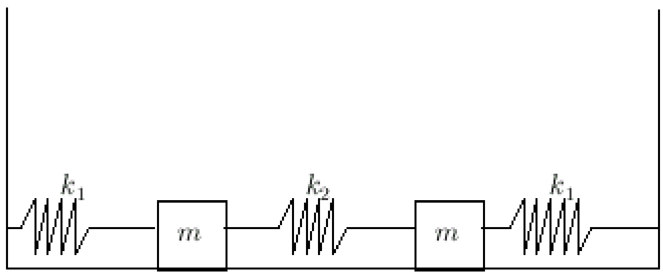
8.5 Ejercicios

1. Dos sólidos están atados a unos resortes como indica la figura.



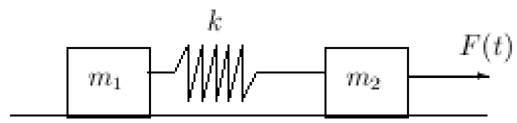
   Si están en equilibrio, determinar las ecuaciones del movimiento para ambos sólidos cuando se separan de su posición de equilibrio. Aplicarlo al caso en que las masas de los son iguales a $1K_g$. los resortes tienen una constante recuperadora de 1 y 2 N/m, respectivamente y los cuerpos se separan 1 y 0.5 m.

2. Dado el sistema en equilibrio determinado por la figura

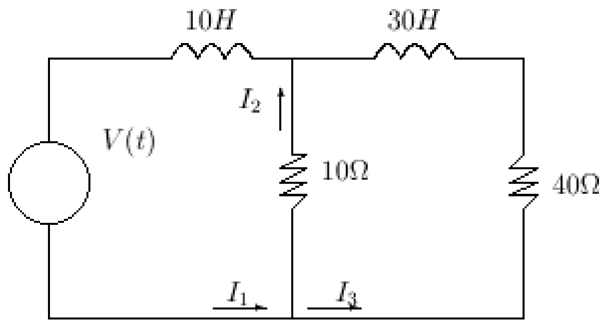


determinar las ecuaciones de movimiento que se producen al desplazar la masa de la izquierda $75\,mm$ hacia la izquierda para luego soltarla. Se supone que no hay resistencia con el suelo y que $m = 15\,kg$, $k_1 = 0.8\,N/mm$ y $k_2 = 0.9\,N/mm$. Determinar las posiciones de los cuerpos a los 5 segundos de soltar el cuerpo.

3. Determinar las ecuaciones de movimiento para el siguiente sistema suponiendo nulos los efectos del rozamiento de los cuerpos con el suelo.



4. Determinar las intensidades que circulan por el siguiente circuito, inicialmente descargado (condiciones iniciales nulas), en los siguientes casos:

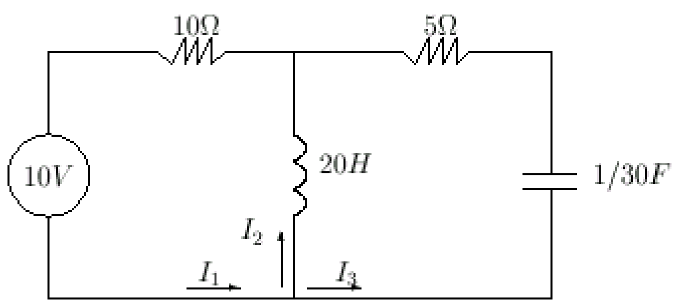


   (a) $V(t) = 20\,V$.

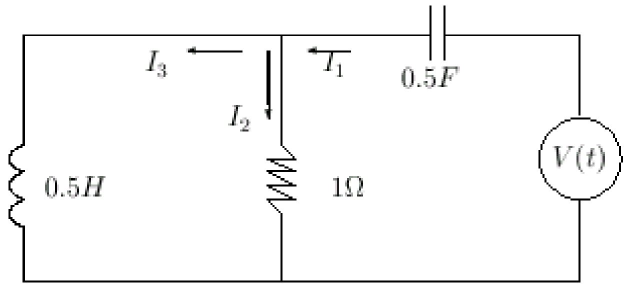
   (b) $V(t) = \cos t\,V$.

   (c) $V(t) = 10tV$.

5. Suponiendo condiciones iniciales nulas, calcular las intensidades del siguiente circuito

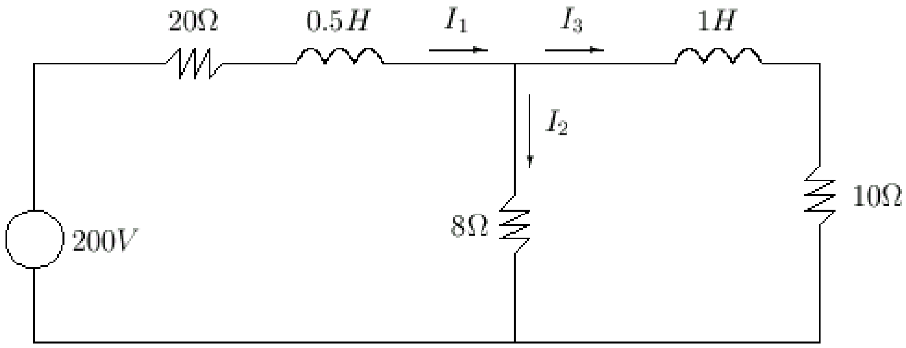


6. Suponiendo condiciones iniciales nulas, calcular las intensidades del siguiente circuito



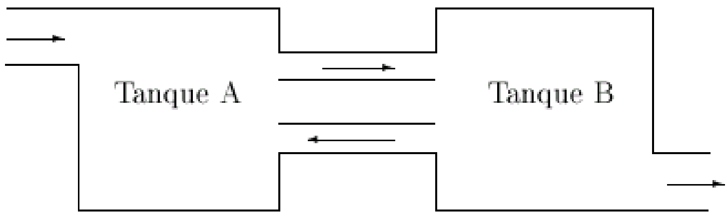
donde $V(t) = \cos(3t)$.

7. Dado el circuito de la figura, obtener la intensidad que circula por cada una de los cables sabiendo que inicialmente estaba descargado.

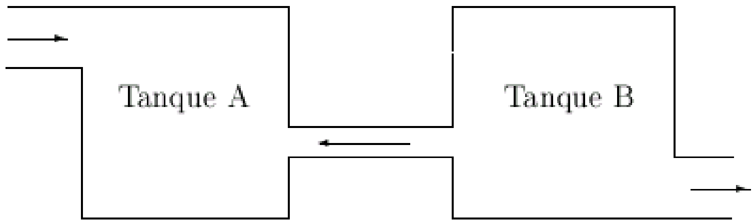


8. Resolver el ejercicio anterior suponiendo que el voltaje es de $\sin(2\pi t)$ voltios.

9. Dos tanques que contienen cada uno 50 litros de líquido se ecuentran interconectados por medio de dos tubos. El líquido fluye del tanque A hacia el tanque B a razón de 4 litros por minuto y del tanque B al tanque A a 1 litro por minuto. El líquido contenido en cada tanque se mantiene prefectamente agitado. Hacia el tanque A entra del exterior agua a razón de 3 litros por minuto y la solución fluye hacia el exterior por el tanque B a la misma velocidad. Si inicialmente el tanque A contiene 25 kilos de sal y el tanque B no contiene nada de sal, determinar la cantidad de sal en cada instante de tiempo.

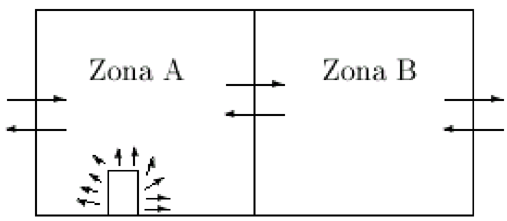


10. Dos grandes tanques, cada uno de 50 litros se encuentran interconectados por un tubo. El líquido fluye del tanque A hacia el B a razón de 5 litros por minuto. El líquido contenido en el interior de cada tanque se mantiene bien agitado. Una salmuera con concentración de 3 kilos por litro fluye del exterior hacia el tanque A a razón de 5 litros por minuto, saliendo hacia el exterior a la misma velocidad por un tubo situado en el tanque B. Si el tanque A contiene inicialmente 50 kilos de sal y el tanque B contiene 100 kilos, determinar la cantidad de sal en cada instante.



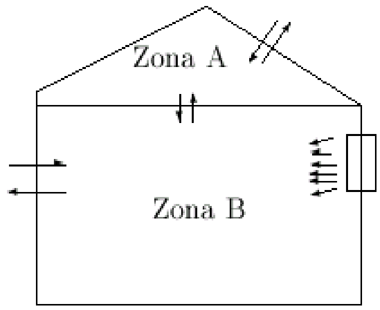
11. Un edificio consta de dos zonas A y B. Solamente la zona A es calentada por un calefactor, que genera 80.000 kilocalorias por hora. La capacidad calorífica de la zona A es de 1/4 de grado Celsius por cada 1000 kilocalorias. Las constantes de transferencia de calor son 4 horas entre la zona A y el exterior, 5 horas entre la zona B y el exterior y 3 horas entre las dos zonas. Si la temperatura exterior es de 0 grados Centígrados, ¿a qué temperatura puede llegar a enfriarse la zona B?

Nota: las constantes de transferencia de calor son las inversas de las constantes que aparecen el la ley de enfriamiento de Newton.



12. Para fines de refrigeración una casa consta de dos zonas: la zona de ático A y la zona B o habitacional. El área habitacional es refrigerada por medio de una unidad de aire acondicionado de 2 toneladas que disipa 24000 kilocalorias por hora. La capacidad calorífica de la zona B es de 1/2 grado centígrado por cada 1000 kilocalorias. La constantes de transferencia de calor son 2 horas entre la zona A y el exterior, 4 horas entre la zona B y el exterior y 4 horas entre ambas zonas. Si la temperatura exterior permanece a 40 grado centígrados, ¿a qué temperatura puede

llegar a calentarse la zona del ático?



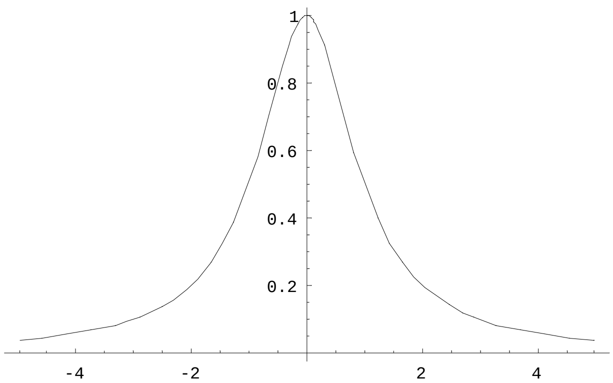
Capítulo 9

Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales

Sumario. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos. Espacio de fases y órbitas. Teoría cualitativa para ecuaciones autónomas. Teoría cualitativa para sistemas planos: isoclinas e integrales primeras. Clasificación de los sistemas lineales con coeficientes constantes. Estabilidad de sistemas lineales. Método de linealización de Lyapunov y el Teorema de Hartman–Grobman. El método directo de Lyapunov. Aplicaciones.

Se pretende en estas notas hacer una recopilación de unos contenidos básicos sobre la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Aunque la palabra cualitativa pueda sonar extraña, en realidad, el alumno ya debe conocer estudios cualitativos de funciones de variable real.

Pongamos un ejemplo y consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. A priori la expresión analítica de la función no nos dice mucho acerca de la misma, es decir, a partir de la expresión analítica de la función no obtenemos fácilmente información útil. Sin embargo a partir de esta expresión analítica podemos obtener su representación gráfica, que nos proporciona un análisis cualitativo de ésta. Así, estudiando límites, asíntotas, extremos relativos, etcétera podemos obtener una información mucho más visual y manejable que la proporcionada por la expresión analítica de la función.



Como vemos, la gráfica nos muestra que la función es acotada, con un valor máximo de 1 en el punto 0. También y entre otras cosas, vemos como la función tiende a 0 en $\pm\infty$. En definitiva, la información visual aportada por la gráfica nos da mucha información sobre el comportamiento de la función en cuestión.

Esta es la filosofía en la que se basa el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales: obtener representaciones gráficas de las soluciones de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales, o más precisamente de familias de soluciones, es decir, información gráfica sobre tipos de soluciones que se engloban en unos objetos llamados órbitas.

El por qué de este estudio cualitativo de la ecuaciones diferenciales es el siguiente. Ya a finales del siglo XIX los matemáticos perdieron toda esperanza de encontrar soluciones de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales. Se ponía fin por tanto al estudio cuantitativo de las ecuaciones diferenciales, cuyo estudio ha marcado la primera parte del curso. Una vez que se renunció al análisis cuantitativo, se obtaron por dos vías complementarias que tratan de obtener información sobre las soluciones de ecuaciones diferenciales sin necesidad de resolver la ecuación. Una de estas vías es el estudio de los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales que será objeto de estudio en la asignatura de cuarto curso métodos numéricos. Sobre la segunda vía, el estudio de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales vamos a dar unas pequeñas pinceladas al final del curso.

Hay que destacar que ambas vías gozan de buena salud en lo que a investigación en matemáticas se trata. En particular, el desarrollo de la teoría cualitativa, usando como herramienta métodos numéricos aplicados en cada vez más potentes ordenadores, ha dado lugar a la gestación de una de las teorías matemáticas de la más vigente actualidad como es la teoría del caos.

9.1 Ecuaciones y sistemas autónomos

Una ecuación diferencial autónoma es una expresión de la forma

$$y' = f(y)$$

donde f es una función real de variable real. Hay que enfatizar que en la ecuación no aparece la variable independiente de la cual depende y. Ejemplos de este tipo de ecuaciones son:

$$\begin{aligned} y' &= y, \\ y' &= y^2 \sin y, \\ y' &= e^y y. \end{aligned}$$

Un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo es una expresión de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = f_1(y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_1(y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_1(y_1, y_2, ..., y_n), \end{array} \right.$$

donde $f_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Ejemplos de sistemas autónomos son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + y, \\ y' = x - y, \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x' = \sin(x+y), \\ y' = \cos(x+y), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = e^{x+y}y, \\ y' = e^{x+y}x. \end{cases}$$

Cualquier ecuación o sistema de ecuaciones no autónomos pueden reescribirse como un sistema autónomo introduciendo una nueva variable dependiente. Para ejemplificar este hecho consideremos la ecuación

$$y' = t \cdot y.$$

Tomando $x(t) = t$ como una nueva variable dependiente, la ecuación anterior podemos escribirla como

$$\begin{cases} x' = 1, \\ y' = x \cdot y. \end{cases}$$

No obstante, aumentamos en una dimensión el número de variables dependientes, lo cual supone un alto precio a la hora del estudio cualitativo de la ecuación. Sin otra consideración, piénsese que es más sencillo a priori representar curvas en dos dimensiones que en tres. Además, en el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos, el estudio de la teoría cualitativa en dimensión tres dista mucho de estar analizado y comprendido, con lo cual el pasar de dimensión dos a tres no nos asegura ningún conocimiento sobre el sistema.

9.2 Soluciones y órbitas

Sea el sistema autónomo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{9.1}$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ y $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función con funciones coordenadas $f_1, f_2, ..., f_n$. En general supondremos que la función $\mathbf{f}$ satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad de soluciones, por lo que el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

tendrá una única solución que denotaremos por $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0)$. Supondremos además que esta solución está definida en el intervalo más grande posible (*solución maximal*), denotado por $(a(t_0, \mathbf{y}_0), b(t_0, \mathbf{y}_0))$, $a(t_0, \mathbf{y}_0), b(t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}$, y que normalmente será toda la recta real (es decir, en casi todos los ejemplos que estudiemos $a(t_0, \mathbf{y}_0) = -\infty$ y $b(t_0, \mathbf{y}_0) = +\infty$). El espacio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ en el cual están definidas las soluciones del sistema (9.1) se llamará *espacio de fases*. Se define la *órbita* del sistema asociada a la condición inicial $(t_0, \mathbf{y}_0)$ como la gráfica en $\mathbb{R}^n$ de la solución maximal $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0)$ asociada a dichas condiciones iniciales. Puede haber soluciones distintas que den lugar a la misma órbita, por lo que las órbitas pueden ser miradas cómo "tipos de soluciones esencialmente iguales".

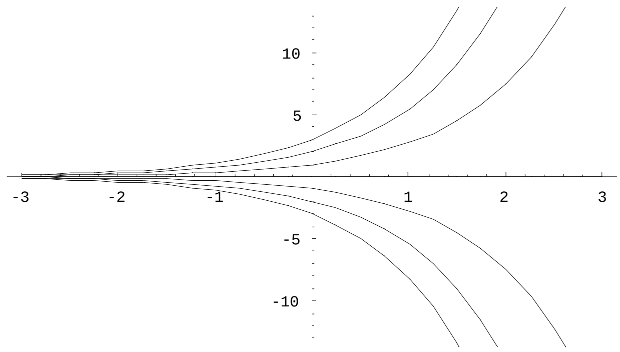
Ejemplo 9.1 Consideremos la ecuación diferencial autónoma

$$y' = y.$$

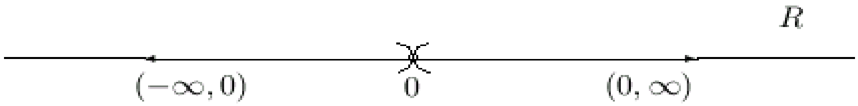
Aquí, el espacio de fases es toda la recta real $\mathbb{R}$ al estar la función $f(y) = y$ definida para todo número real. Dados $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$, sabemos que la solución maximal definida en toda la recta real del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

viene dado por $y(t, t_0, y_0) = y_0 e^{t-t_0}$. Si representamos en el plano algunas soluciones para valores positivos, negativos y nulo de y_0 tenemos:



Como vemos, cuando $y_0 > 0$ las gráficas de las soluciones son siempre la semirrecta $(0, +\infty)$, cuando $y_0 < 0$ son $(-\infty, 0)$ y por último, el caso $y_0 = 0$ es degenerado con solución constante y por tanto la gráfica sera un único punto $\{0\}$. Así en este sistema distinguimos tres tipos de órbitas según el signo de la condición inicial que consideremos. Además, todas las soluciones con $y_0 > 0$ son estrictamente crecientes, mientras que si $y_0 < 0$ las soluciones son estrictamente decrecientes. Todo esto podemos resumirlo de la siguiente forma



donde la orientación de las flechas marca el crecimiento o decrecimiento de las soluciones que generan cada órbita. Como puede apreciarse, el diagrama de fases contiene toda la información cualitativa de las soluciones: cada una de las tres órbitas nos proporciona toda la información que conocemos sobre la representación gráfica de las soluciones. ■

Vamos a ver a continuación cómo obtener toda la información sobre diagramas de fases de sistemas autónomos sin necesidad de resolver la ecuación. Previamente necesitamos saber cómo son las diferentes órbitas que pueden presentarse en un sistema autónomo. Para ello es preciso introducir algunas definiciones. Diremos que $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un *punto crítico* de (9.1) si $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$. Los puntos críticos tienen la peculiaridad de ser órbitas (llamadas *degeneradas*) del sistema (9.1), ya que la función definida como $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es solución del problema de condiciones iniciales correspondiente. Una vez identificada un tipo de órbita, pasaremos a enunciar sin demostración el siguiente resultado, que describe toda la casuística que se puede presentar para órbitas en sistemas autónomos.

Teorema 9.1 *Sea el sistema autónomo dado por (9.1). Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

(a) Dadas dos órbitas Γ_1 y Γ_2 son siempre disjuntas o iguales. Además si son iguales existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{y}_1(t+t_0) = \mathbf{y}_2(t)$, donde $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$ son las soluciones asociadas a las órbitas Γ_1 y Γ_2 respectivamente.

(b) Si Γ es una órbita no degenerada del sistema, entonces es de uno de los siguientes tipos:

(b1) Cualquier solución $\mathbf{y}$ asociada a Γ es inyectiva.

(b2) Cualquier solución $\mathbf{y}$ asociada a Γ es periódica de periodo $T > 0$, esto es, $\mathbf{y}(t+T) = \mathbf{y}(t)$ para todo t en su dominio de definición.

Nuestro objetivo a partir de ahora será estudiar las órbitas de un sistema autónomo dado intentando esbozar lo que se conoce como *diagrama de fases* del sistema. Empezaremos estudiando diagramas de fases definidos por una ecuación diferencial autónoma, como la estudiada en el primer ejemplo.

9.3 Teoría cualitativa ecuaciones autónomas

Volvamos al ejemplo

$$y' = y.$$

Vamos a ver cómo obtener el diagrama de fases de la ecuación sin necesidad de conocer las soluciones.

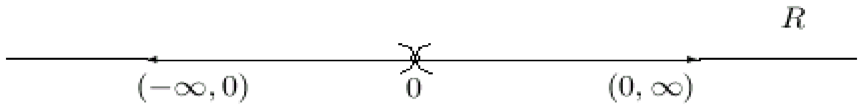
En primer lugar calculamos los puntos críticos del sistema, que en este ejemplo concreto se reducen al 0. Así, el conjunto $\{0\}$ constituye una órbita degenerada que da lugar a la solución constante $y(t) = 0$. Como las órbitas son siempre disjuntas, el 0 divide la recta real en dos conjuntos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ de manera que si una condición inicial de una solución está en por ejemplo en $(-\infty, 0)$, dicha solución nunca podrá pasar a $(0, +\infty)$ y al revés. Además, si $y(t)$ es una solución contenida en $(-\infty, 0)$, entonces es estrictamente decreciente ya que $y'(t) = y(t) < 0$. Igualmente vemos que si $y(t)$ está contenida en $(0, +\infty)$, entonces debe ser estrictamente creciente.

Para completar el estudio sólo debemos comprobar que $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ son dos órbitas. Supongamos por ejemplo que $(a, b) \subseteq (-\infty, 0)$ es una órbita. Si $a < -\infty$, entonces tomamos el problema de condiciones iniciale

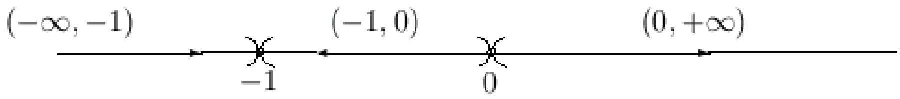
$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = a, \end{cases}$$

que proporciona una solución maximal $y(t, 0, a)$, que será decreciente. Por lo tanto existe $t_0 < 0$ tal que $y(t_0, 0, a) > a$ y por tanto, la órbita generada por $y(t, 0, a)$ tendrá intersección no vacía con (a, b), por lo que en virtud del Teorema 9.1 éstas deben ser iguales. Así podemos extender la órbita (a, b) más allá de a hasta $-\infty$. Por un razonamiento análogo podemos extenderla a partir de b hasta 0.

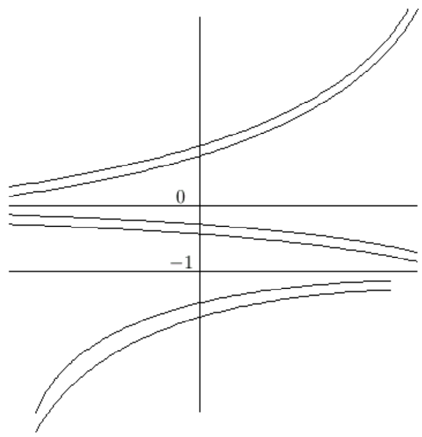
Así tenemos las tres órbitas del sistema que representamos como



A partir de un diagrama de fases, y siempre suponiendo que las soluciones maximales están definidas en toda la recta real, podemos esbozar la gráfica de las soluciones de una ecuación autónoma. Pongamos el siguiente ejemplo:



Entonces, suponiendo que toda solución maximal está definida en todo $\mathbb{R}$, el diagrama anterior nos dice que toda solución contenida en $(-\infty,-1)$ es creciente, las contenidas en $(-1,0)$ son decrecientes y las contenidas en $(0,+\infty)$ son crecientes, por lo que las gráficas de las soluciones tendrían el siguiente aspecto:



Ejercicio 9.1 *Esbozar los diagramas de fases de las siguientes ecuaciones diferenciales:*

$$\text{(a) } y' = y(y-1) \quad \text{(b) } y' = y^2(y+1) \quad \text{(c) } y' = y^2 - 1$$

$$\text{(d) } y' = \sqrt{y(y-2)} \quad \text{(e) } y' = y/(y-1) \quad \text{(f) } y' = \sqrt{1-y^2}$$

$$\text{(g) } y' = \frac{y}{y(y^2-4)} \quad \text{(h) } y' = \sin y \quad \text{(i) } y' = y^2+1$$

9.4 Teoría cualitativa de sistemas planos

Para obtener diagramas de fases de ecuaciones autónomas de orden uno, bastaba con conocer nociones sobre la derivada de una función. Al aumentar una dimensión, el estudio para obtener diagramas de fases necesariamente se complica, aunque en algunos casos es posible. Hemos de decir que debemos de conformarnos con llegar a dimensión 2, ya que para dimensión mayor o igual que tres no se sabe en general cómo obtener dichos diagramas de fases. Vamos a ver qué ideas necesitamos para esbozar tales diagramas.

9.4.1 Cálculo de los puntos críticos

Consideremos el sistema autónomo dado por

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y); \\ y' = f_2(x, y). \end{cases}$$

En este caso las órbitas son curvas planas que por el Teorema 9.1 pueden ser de tres tipos:

- Degeneradas (correspondientes a los puntos críticos).
- Periódicas.
- No cerradas y sin autointersecciones (las llamadas órbitas regulares).

Para empezar con el análisis del diagrama de fases, determinaremos en primer lugar las órbitas degeneradas, que las calcularemos resolviendo el sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0; \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 9.2 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y, \end{cases}$$

del cual obtenemos sus puntos críticos resolviendo el sistema lineal

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

del que fácilmente obtenemos que su único punto crítico es el $(0, 0)$, que será por tanto la única órbita no degenerada del sistema. ■

Ejemplo 9.3 Sea ahora el sistema

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 2x + 2y. \end{cases}$$

Ahora es fácil comprobar que el sistema

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + 2y = 0, \end{cases}$$

es compatible indeterminado y que por tanto la recta $x + y = 0$ es una recta de puntos críticos. ■

Ejemplo 9.4 Los anteriores sistemas eran lineales. Consideremos el sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = 1 - x^2 - y^2. \end{cases}$$

Ahora resolvemos el sistema

$$\begin{cases} -x = 0; \\ 1 - x^2 - y^2 = 0, \end{cases}$$

de donde obtenemos los puntos críticos $(0, 1)$ y $(0, -1)$. ■

Ejercicio 9.2 *Dados los siguientes sistemas planos, calcular los puntos críticos de los mismos.*

$$(a) \begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = 5x - 7y \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = xy \\ y' = x - y \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x' = \sin y \\ y' = x + y^2 \end{cases}$$

$$(a) \begin{cases} x' = x^2 + y^2 \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x^2 - y \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x' = e^{xy} \\ y' = x + y^2 \end{cases}$$

9.4.2 Isoclinas

Consideremos una solución $(x(t), y(t))$ del sistema plano

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y); \\ y' = f_2(x, y). \end{cases}$$

Entonces el vector velocidad de la curva plana determinada por la solución es

$$(x'(t), y'(t)) = (f_1(x(t), y(t)), f_2(x(t), y(t))),$$

por lo que estará determinado por $(x(t), y(t))$, o lo que es lo mismo, por el valor en un punto (x, y) del plano. Es decir, para todo (x, y) el vector $(f_1(x, y), f_2(x, y))$ es tangente a las órbitas del sistema.

Las isoclinas son los puntos del plano de tangencia horizontal y vertical, siendo la isoclina horizontal la determinada por la curva

$$f_2(x, y) = 0,$$

y la isoclina vertical la determinada por

$$f_1(x, y) = 0.$$

Los puntos de intersección de las dos isoclinas dan lugar a los puntos críticos del sistema. Además, en general las isoclinas dividen el plano en diferentes regiones donde el vector tangente tiene la misma dirección y sentido. Teniendo en cuenta los signos de las funciones que determinan el sistema podemos esbozar las direcciones del campo de velocidades del sistema.

Ejemplo 9.5 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

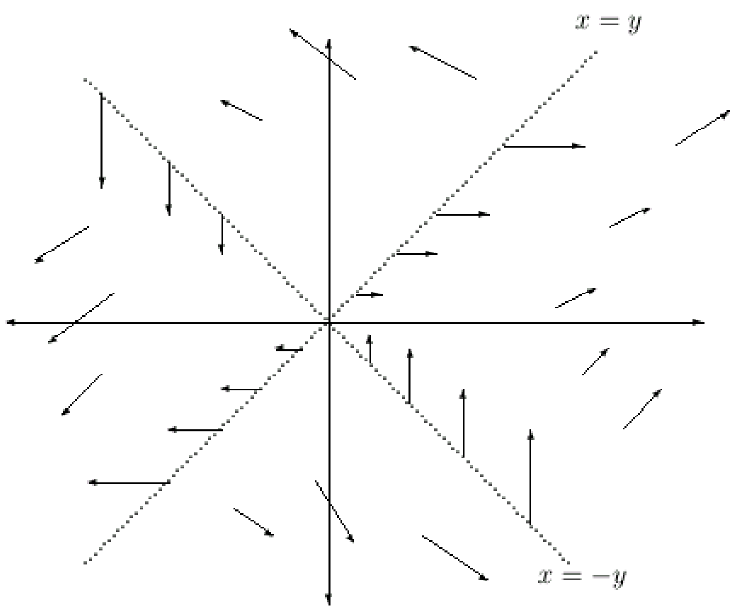
La isoclina horizontal viene dada por la recta

$$x - y = 0,$$

mientras que la isoclina vertical está dada por

$$x + y = 0.$$

Así, podemos esbozar aproximadamente el campo de velocidades como muestra la siguiente figura, donde principalmente hemos de fijarnos en las direcciones y sentidos de los vectores velocidad.

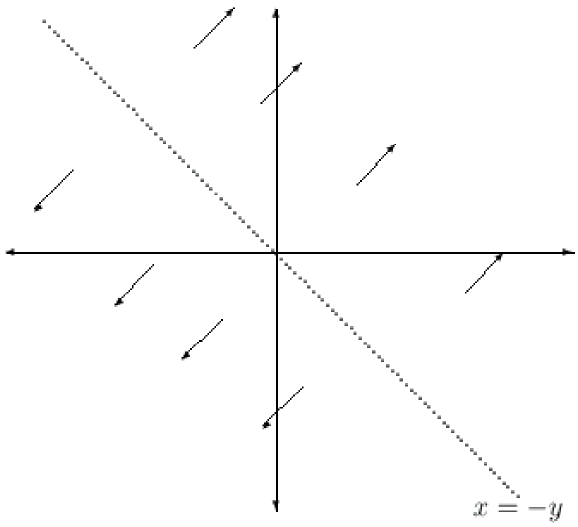


Notar que el punto $(0,0)$, único punto crítico del sistema se obtiene como intersección de las dos rectas isoclinas. ■

Ejemplo 9.6 Sea ahora el sistema

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 2x + 2y. \end{cases}$$

Este sistema no tiene isoclinas horizontales y verticales, dado que la recta $x = -y$ contiene todos los puntos críticos del mismo. El esbozo de las direcciones de los vectores velocidad del campo se recoge en la siguiente figura.

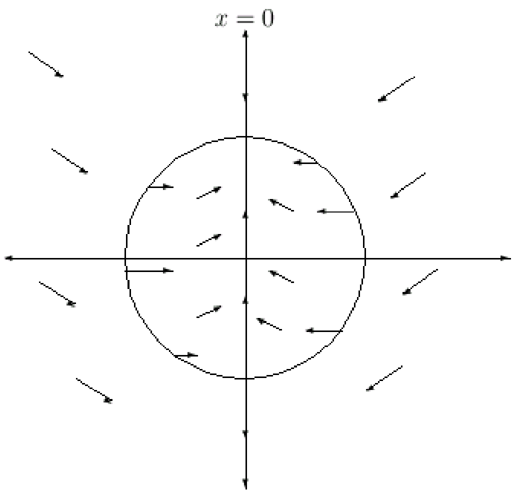


■

Ejemplo 9.7 Consideremos el sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = 1 - x^2 - y^2. \end{cases}$$

La isoclina vertical sería la recta $x = 0$, mientras que la isoclina horizontal es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Así vemos que en los sistemas no lineales las isoclinas no tienen por que ser rectas. El diagrama de las direcciones de los vectores velocidad se muestra a continuación.



■

Ejercicio 9.3 *Obtener las isoclinas y esbozar el diagrama de las direcciones del vector velocidad de las órbitas para los sistemas del Ejercicio 9.2.*

9.4.3 Integrales primeras y diagramas de fases

Una vez obtenidos los puntos críticos y las direcciones de los vectores velocidad de las futuras órbitas, necesitamos un método para obtener cada una de éstas. Con carácter general sólo dispondremos del cálculo de lo que se conoce como integrales primeras del sistema. Tomemos como siempre el sistema

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y); \\ y' = f_2(x,y). \end{cases}$$

Se definen las integrales primeras del sistema como aquellas que se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$y'(x) = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}$$

o bien

$$x'(y) = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)},$$

auqnue en general sólo utilizaremos la primera ecuación. Nótese que los papeles de las variables independientes cambian en las ecuaciones indistintamente. Se puede probar aunque queda fuera del alcance del curso que las integrales primeras son unión de órbitas del sistema original. Así, cuando las integrales primeras puedan dibujarse de forma sencilla, podremos obtener el diagrama de fases del sistema, donde las dirección temporal de las órbitas viene marcada por las distintas direcciones del vector velocidad obtenido en la sección anterior.

Ejemplo 9.8 Sea de nuevo el sistema

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

Las integrales primeras del mismo se obtendrán resolviendo la ecuación

$$y' = \frac{x-y}{x+y}$$

o equivalentemente

$$y - x + (x+y)y' = 0.$$

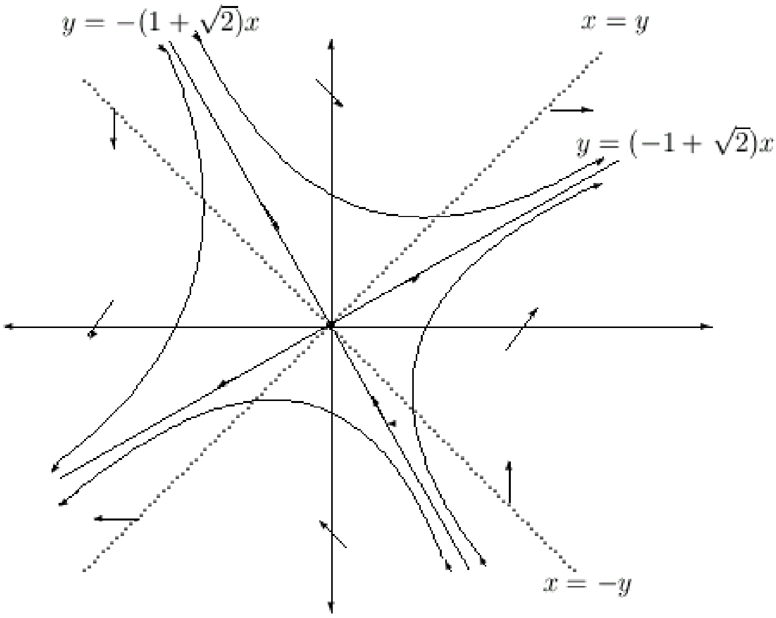
Como puede comprobarse fácilmente esta ecuación es exacta, y su solución general es de la forma

$$\frac{y^2}{2} + yx - \frac{x^2}{2} = c.$$

Completando cuadrados escribimos la curva anterior como

$$\overline{y}^2 - x^2 = c,$$

donde $\overline{y} = (y+x)/\sqrt{2}$, por lo que vemos que las integrales primeras son hipérbolas si $c \neq 0$ y dos rectas si $c = 0$. Las rectas son $\overline{y} = \pm x$, o equivalentemente $y = (\pm\sqrt{2} - 1)x$. Teniendo esto en cuenta y tomando como partida la información sobre integrales primeras obtenida anteriormente, esbozamos el siguiente diagrama de fases.



Nótese que la dirección temporal en las órbitas está indicada por una flecha. Esa dirección viene marcada por la dirección y sentido del vector velocidad obtenido previamente: según la región, determinada por las isoclinas, en la que la órbita esté se tendrá una dirección. Nótese además que las rectas $y = -(1+\sqrt{2})x$ e $y = (-1+\sqrt{2})x$ contienen 3 órbitas: dos semirrectas divididas por la órbita degenerada formada por el punto crítico $(0,0)$.

Además, las órbitas están formadas por las curvas completas salvo que, como en el caso de las semirrectas, haya varias órbitas contenidas en la misma curva. Es decir, la curva comprendida entre el primer y segundo cuadrante es necesariamente una órbita del sistema, no puede ocurrir que se divida en varias órbitas por el mismo argumento que el explicado en el primer ejemplo de esbozo de sistemas de fases de ecuaciones autónomas. ■

Ejemplo 9.9 Tomemos el sistema

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 2x + 2y. \end{cases}$$

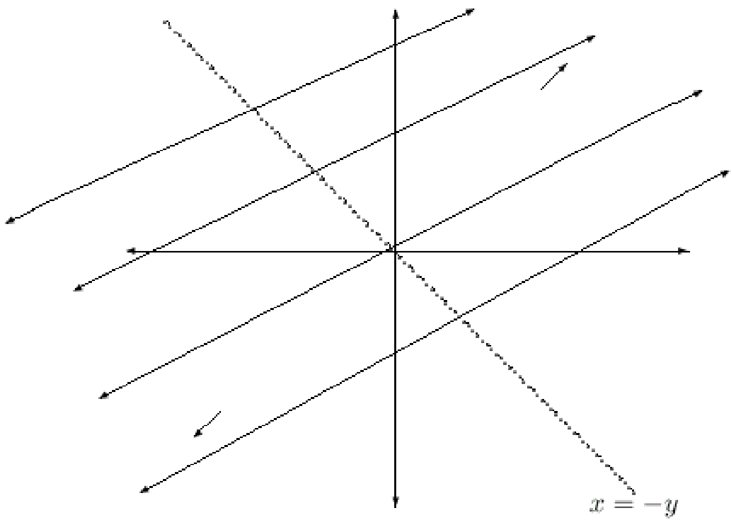
Recordemos que todo los puntos de la recta $x = -y$ son críticos y que no hay isoclinas. Las integrales primeras se calculan a partir de la ecuación

$$y'(x) = \frac{2x + 2y}{x + y} = 2,$$

de donde comprobamos fácilmente que se trata de la familia de rectas paralelas

$$y = 2x + c.$$

Esbozamos entonces el diagrama de fase en la siguiente figura.



Nótese que cada recta paralela contiene tres órbitas diferentes: dos semirrectas separadas por un punto crítico perteneciente a la recta $x = -y$. ■

Ejemplo 9.10 Sea por último el sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x^3, \end{cases}$$

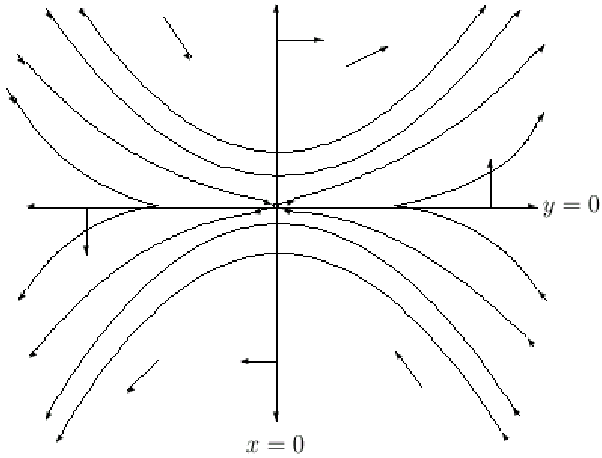
y hagamos un estudio del mismo encaminado a obtener su diagrama de fases. En primer lugar, nótese que las rectas $y = 0$ y $x = 0$ son las isoclinas vertical y horizontal, respectivamente. Así el único punto crítico del sistema será el $(0, 0)$. Por otra parte, para el cálculo de las integrales primeras hemos de resolver la ecuación de variables separables

$$y'(x) = x^3/y(x),$$

de la cual obtenemos fácilmente la solución

$$y(x) = \pm\sqrt{x^4/2 + c}.$$

Con tada esta información esbozamos el siguiente diagrama de fases.



■

Ejercicio 9.4 *Esbozar el diagrama de fases de los siguientes sistemas planos:*

$$(a)\left\{\begin{array}{l} x' = x \\ y' = 2y \end{array}\right. \quad (b)\left\{\begin{array}{l} x' = x \\ y' = 3x - 4y \end{array}\right. \quad (c)\left\{\begin{array}{l} x' = -2x + y \\ y' = -x + y \end{array}\right.$$

$$(d)\left\{\begin{array}{l} x' = y(2 - y) \\ y' = (x - 2)(y - 2) \end{array}\right. \quad (e)\left\{\begin{array}{l} x' = y \\ y' = xy^2 \end{array}\right. \quad (f)\left\{\begin{array}{l} x' = xy \\ y' = x^2 \end{array}\right.$$

9.5 Clasificación de sistemas planos lineales. Estabilidad de sistemas lineales

9.5.1 Diagramas de fases de sistemas planos

La gran mayoría de las veces no es posible calcular explícitamente las integrales primeras de los sistemas planos. Es más, aunque el cálculo de éstas sea posible, muchas veces no es sencillo dibujar en el plano la curva correspondiente a la integral primera. Veamos a continuación cómo representar los diagramas de fases de sistemas planos lineales sin necesidad de obtener las integrales primeras del sistema.

Para fijar ideas, sea el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{l} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{array}\right. \tag{9.2}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. La matriz asociada a dicho sistema es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$$

Una de las claves para representar este tipo de sistemas es la siguiente propiedad.

Proposición 9.2 *Sea el sistema plano dado por (9.2) y sean $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ un valor propio de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^2$ un vector propio asociado a λ_1. Sea L_1 la recta generada por $\mathbf{v}_1$. Entonces para todo $(x_0, y_0) \in L_1$ se verifica que cualquier solución de (9.2) que pase por (x_0, y_0) está contenida en L_1.*

Demostración. Supongamos por simplificar que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ (los otros casos son análogos haciendo un cambio en la variable independiente). Si $(x_0, y_0) = (0,0)$, entonces la órbita es el punto crítico. Así, supongamos que $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Como $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, necesariamente existe otro valor propio real λ_2. Distinguimos entonces dos casos: (a) $\lambda_1 = \lambda_2$ y (b) $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Caso (a). En este caso la solución asociada a la condición inicial está dada por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{\mathbf{A}t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda_1 t} a_1(\mathbf{A}) q_1(\mathbf{A}) [\mathbf{I}_2 + (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_2)t] \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $a_1(\mathbf{A}) = \mathbf{I}_2$ y $q_1(\mathbf{A}) = \mathbf{I}_2$. Ahora bien, como $(x_0, y_0) \in L_1$ y es no nulo, es un vector propio de $\mathbf{A}$ asociado a λ_1, con lo que

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_2) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t} a_1(\mathbf{A}) q_1(\mathbf{A}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in L_1.$$

Caso (b). Ahora la solución es de la forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{\mathbf{A}t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= [e^{\lambda_1 t} a_1(\mathbf{A}) q_1(\mathbf{A}) + e^{\lambda_2 t} a_2(\mathbf{A}) q_2(\mathbf{A})] \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $a_1(\mathbf{A}) = c_1 \mathbf{I}_2$, $q_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}_2$, $a_2(\mathbf{A}) = c_2 \mathbf{I}_2$ y $q_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_2$, con $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$. Como (x_0, y_0) es un vector propio asociado a λ_1, se verifica que

$$q_2(\mathbf{A}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_2) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t} a_1(\mathbf{A}) q_1(\mathbf{A}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\lambda_1 t} c_1 \mathbf{I}_2 (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}_2) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
&= e^{\lambda_1 t} c_1 \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - e^{\lambda_1 t} c_1 \lambda_2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
&= e^{\lambda_1 t} c_1 \lambda_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - e^{\lambda_1 t} c_1 \lambda_2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
&= e^{\lambda_1 t} c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in L_1,
\end{aligned}
$$

como queríamos probar. ■

Procedemos a continuación a la clasificación de los sistemas planos lineales, entre los que distinguimos dos casos iniciales atendiendo a la nulidad o no del determinante de la matriz del sistema **A**. Asímismo, estos dos casos se subdivirán en dos según sea la matriz **A** diagonalizable o no, según el siguiente esquema.

$$
|\mathbf{A}| \neq 0 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \text{ diagonalizable.} \\ \mathbf{A} \text{ no diagonalizable.} \end{array} \right.
$$

$$
|\mathbf{A}| = 0 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \text{ diagonalizable.} \\ \mathbf{A} \text{ no diagonalizable.} \end{array} \right.
$$

Caso no degenerado: $|\mathbf{A}| \neq 0$

Caso A: La matriz A es diagonalizable.

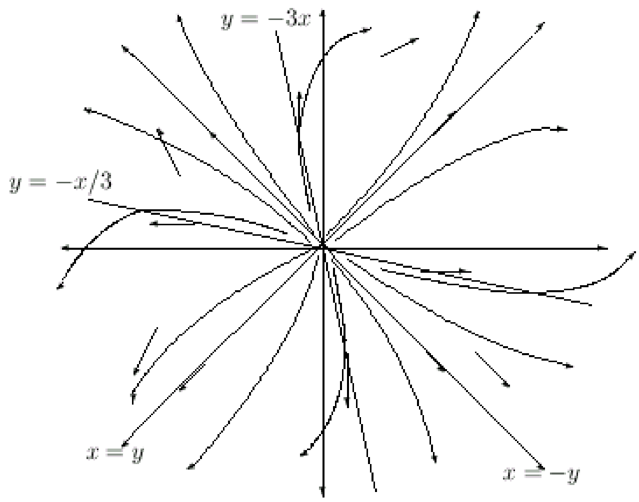
Sean λ_1 y λ_2 dos valores propios reales con vectores propios asociados $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, respectivamente. Entonces las dos rectas $L_1 =< \mathbf{v}_1 >$ y $L_2 =< \mathbf{v}_2 >$ contienen cada una tres órbitas del sistema: dos semirrectas divididas por el punto crítico $(0,0)$. Para cada una de esas semirrectas existen sólo dos opciones: la dirección de la órbita las aleja del punto crítico, o las acerca. Esto, junto con las isoclinas y el campo de velocidades, nos permiten esbozar el diagrama de fases, como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 9.11 Consideremos el sistema

$$
\left\{ \begin{array}{l} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{array} \right.
$$

El polinomio característico asociado a la matriz del sistema es $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$, que cómo comprobamos fácilmente tiene por raíces $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$, valores propios de la matriz, por lo que ésta es diagonalizable. De álgebra lineal deducimos que las rectas de valores propios son $x + y = 0$ para el valor propio 2 y $x - y = 0$ para el valor propio 4. Esto, juntos con las isoclinas horizontal

$y = -x/3$ y vertical $y = -3x$, nos permite esbozar el siguiente diagrama de fases.



Notar que

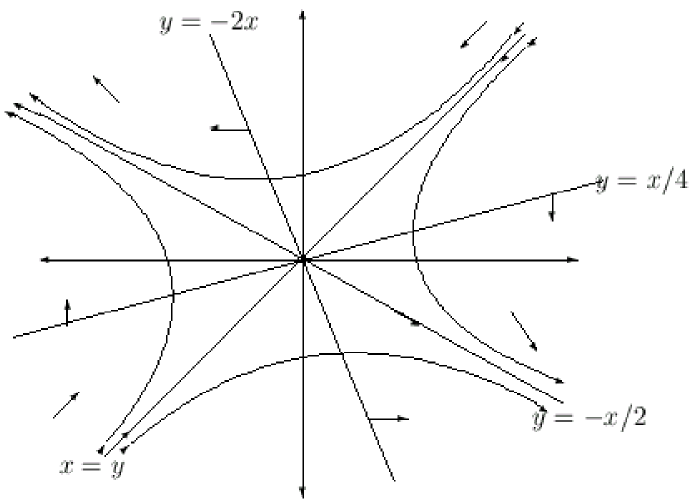
$$\lim_{t \to +\infty} ||x(t), y(t)|| = \lim_{t \to \infty} \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = +\infty$$

y $\lim_{t \to -\infty} x(t) = \lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$ para todas las órbitas excepto para la órbita degenerada. Este tipo de diagrama de fases recibe el nombre de *nodo inestable*. ■

Ejemplo 9.12 Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} x' = x - 4y, \\ y' = -2x - y. \end{cases}$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = x^2 - 9$, de donde los valores propios son 3 y -3. La recta invariante correspondiente al valor propio 3 es $y = -x/2$, mientras que $x = y$ es la recta correspondiente al valor propio -3. Junto con las isolinas obtenemos el siguiente diagrama de fases.



Nótese que todas las órbitas excepto las contenidas en la recta $x = y$ cumplen la condición

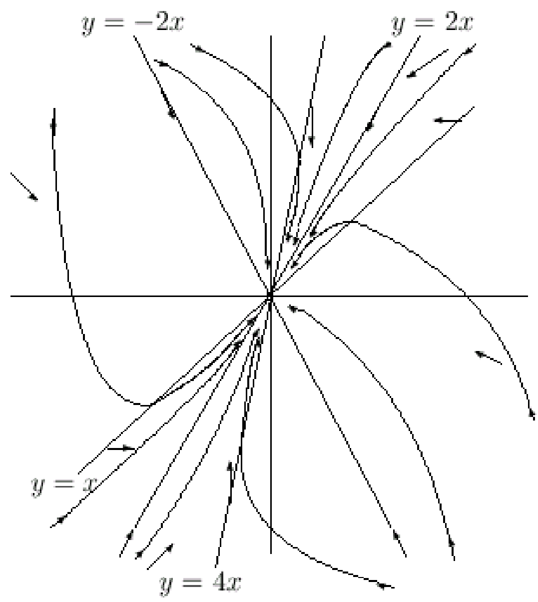
$$\lim_{t\to\pm\infty} ||x(t), y(t)|| = \lim_{t\to\pm\infty} \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = +\infty.$$

Este tipo de diagrama recibe el nombre de *punto de silla.* ■

Ejemplo 9.13 Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = -4x + y, \\ y' = 4x - 4y. \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -6$ son los valores propio de la matriz del sistema, con subespacios propios asociados $y = 2x$ e $y = -2x$, respectivamente. Las isoclinas y el campo de vectores nos ayudan a esbozar el siguiente diagrama de fases.



Obsérvese como la isoclina $y = x$ puede atravesarse de derecha a izquierda en el primer cuadrante, pero no de izquierda a derecha. Obsérvense situaciones similares para la demás isoclinas en diferentes cuadrantes. Por otra parte, también queremos destacar que para toda órbita excepto la degenerada se verifica que $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0, 0)$, mientras que

$$\lim_{t\to-\infty} ||x(t), y(t)|| = \lim_{t\to-\infty} \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = +\infty.$$

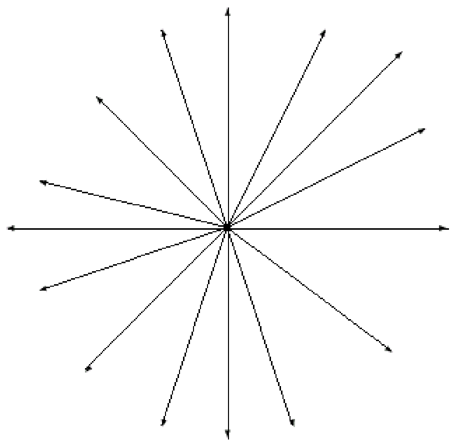
Este tipo de diagrama de fases responde al nombre de *nodo inestable.* ■

Existe un caso particular de los nodos estable e inestable, que reciben el nombre de *nodos estrella estable* e *inestable*, cuando el valor propio es único pero de multiplicidad dos. En este caso cualquier recta del plano es una unión de dos órbitas, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.14 Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 2y. \end{cases}$$

Puede verse fácilmente que 2 es el único valor propio y que todo $\mathbb{R}^2$ es el subespacio propio asociado. Entonces tenemos el siguiente diagrama de fases



■

Ejercicio 9.5 *Esbozar los diagramas de fases de los siguientes sistemas lineales, indicando a qué tipo corresponde:*

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x - y, \\ y' = y. \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -x + 3y, \\ y' = 3x - y. \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -2x, \\ y' = x - y. \end{array} \right. \quad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -6x + 2y, \\ y' = 2x - 9y. \end{array} \right.$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 8x - 3y, \\ y' = -2x + 13y. \end{array} \right. \quad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x + 9y, \\ y' = 3x - 5y. \end{array} \right. \quad \text{(g)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -3x, \\ y' = -3y. \end{array} \right.$$

Caso B: La matriz A no es diagonalizable.

Las causas que producen una matriz cuadrada no diagonalizable son dos, o bien los valores propios son complejos conjugados, o bien existe un único valor propio real con multiplicidad dos de manera que el espacio invariante asociado tiene dimensión uno. Veamos ejemplos de cada uno de estos casos.

Supongamos en primer lugar que los valores propios son $\alpha \pm i\beta$, donde α y β son números reales. Para esbozar el diagrama de fases en este caso necesitamos conocer cómo es la solución del sistema, que viene dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = e^{\alpha t}[C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)], \\ y(t) = e^{\alpha t}[(C_1(\alpha - a) + C_2\beta) \cos(\beta t) + (C_2(\alpha - a) - C_1\beta) \sin(\beta t)]/b, \end{array} \right.$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes reales. Nótese que para que se den valores propios complejos, necesariamente b debe ser no nulo [ver el sistema (9.2)]. Distinguimos entonces tres casos dependiendo de que α sea nulo, positivo o negativo.

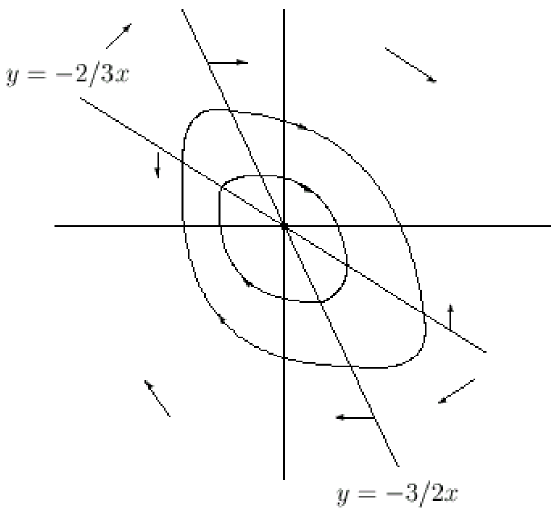
Ejemplo 9.15 Sea el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 2x + 3y, \\ y' = -3x - 2y. \end{array} \right.$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + 5$, por lo que los valores propios son $\pm\sqrt{5}i$, por lo que estamos en el caso en que $\alpha = 0$. La solución del sistema en este caso es

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos(\sqrt{5}t) + C_2 \sin(\sqrt{5}t), \\ y(t) = \frac{-2C_1+\sqrt{5}C_2}{3} \cos(\sqrt{5}t) - \frac{2C_2+\sqrt{5}C_1}{3} \sin(\sqrt{5}t), \end{cases}$$

por lo que vemos que las soluciones son periódicas de periodo $2\pi/\sqrt{5}$. Este hecho dará lugar a órbitas periódicas en el diagrama de fases que a continuación esbozamos.



De hecho, si calculamos las integrales primeras del sistema tenemos la expresión

$$\frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{3}{2}y^2 = k,$$

que se comprueba que se trata de una elipse, por lo que las curvas del diagrama son como siempre una aproximación cualitativa de las reales. Nótese además que las órbitas no tienden en módulo a $\pm\infty$ cuando el parámetro temporal tiende a $\pm\infty$. De hecho, cualquier órbita del sistema está siempre acotada. Un diagrama de fases como el anterior recibe el nombre de *centro*. ■

Ejemplo 9.16 Estudiemos ahora el sistema

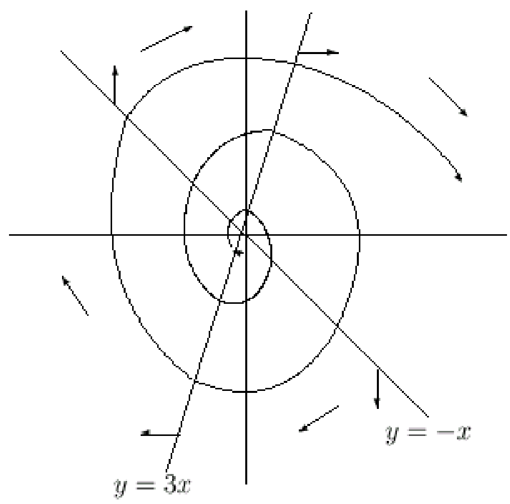
$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -3x + y. \end{cases}$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 4$, que proporciona los valores propios $1 \pm i$, por lo que las soluciones del sistema serán

$$\begin{cases} x(t) = e^t[C_1 \cos t + C_2 \sin t], \\ y(t) = e^t[C_2 \cos t - C_1 \sin t]. \end{cases}$$

En ambos casos, los factores $C_1 \cos t + C_2 \sin t$ y $C_2 \cos t - C_1 \sin t$ son periódicos con periodo 2π, de manera que si éstos no estuvieran multiplicados por e^t, tendríamos de nuevo soluciones periódicas.

El diagrama de fases aproximado del sistema será



donde sólo hemos representado una órbita aparte de la degenerada. Nótese que con un periodo de 2π se pasa por cada una de las isoclinas. Como las funciones aparecen multiplicada por e^t, y ésta es creciente, cada vez que se pasa por la isoclina se hace con un módulo mayor, lo que da esta espiral saliendo de dentro a afuera. Nótese que

$$\lim_{t\to+\infty} ||(x(t), y(t)|| = \infty$$

mientras que

$$\lim_{t\to-\infty} ||(x(t), y(t)|| = 0.$$

Este tipo de diagrama de fases recibe el nombre de *foco inestable.* ■

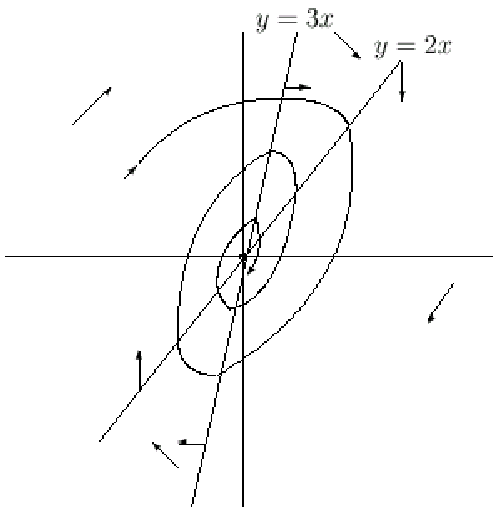
Ejemplo 9.17 Consideremos por último el sistema

$$\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + y, \end{cases}$$

que nos dará el polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ que a su vez nos proporciona los valores propios $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Las soluciones del sistema son

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t/2}[C_1 \cos(\sqrt{3}t/2) + C_2 \sin(\sqrt{3}t/2)], \\ y(t) = e^{-t/2}[\frac{3C_1+\sqrt{3}C_2}{2} \cos(\sqrt{3}t/2) - \frac{5C_2+\sqrt{3}C_1}{2} \sin(\sqrt{3}t/2)]. \end{cases}$$

De manera similar al ejemplo anterior obtenemos el siguiente diagrama de fases.



De manera análoga a la anterior, vemos que

$$\lim_{t \to +\infty} ||(x(t), y(t)|| = 0$$

mientras que

$$\lim_{t \to -\infty} ||(x(t), y(t)|| = +\infty.$$

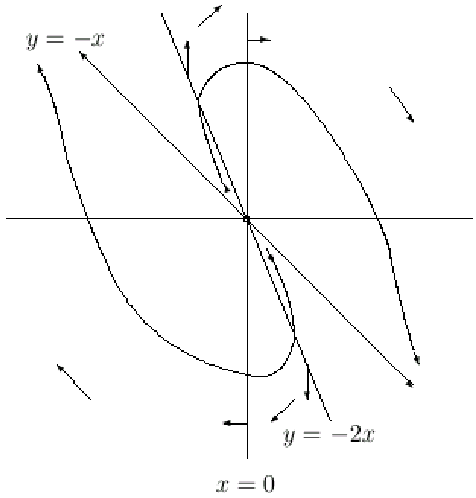
Llamaremos a tipo de diagrama de fases *foco estable.* ■

Supongamos ahora que la matriz **A** tiene un único valor propio real λ, con multiplicidad dos, y tal que $L =< \mathbf{v} >$ es la recta de vectores propios asociados a λ. Distinguimos de nuevo dos casos, dependiendo del signo del valor propio.

Ejemplo 9.18 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Como se puede comprobar fácilmente, el polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, que nos proporciona el valor propio $\lambda = 1$, con subespacio propio asociado $y = -x$. Junto con las isoclinas obtenemos el siguiente diagrama de fases



Aquí se tendrá que

$$\lim_{t\to+\infty} ||(x(t),y(t)|| = \infty$$

mientras que

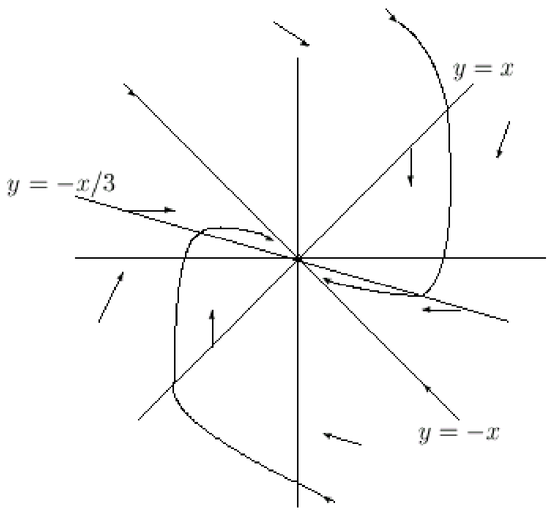
$$\lim_{t\to-\infty} ||(x(t),y(t)|| = 0.$$

Este tipo de diagrama de fases recibe el nombre de *nodo impropio inestable.* ■

Ejemplo 9.19 Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = -x+y, \\ y' = -x-3y. \end{cases}$$

El polinomio característico del sistema es $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$, que nos da el valor propio -2 con el subespacio propio asociado $y = -x$. Esbozamos el diagrama de fases a continuación.



Ahora se tendrá que

$$\lim_{t\to+\infty} ||(x(t),y(t)|| = 0$$

mientras que

$$\lim_{t\to-\infty} ||(x(t), y(t)|| = +\infty.$$

Llamaremos a tipo de diagrama de fases *nodo impropio estable.* ■

Ejercicio 9.6 *Esbozar los diagramas de fases de los siguientes sistemas indicando de qué tipo se trata*

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = -5x - y, \\ y' = x - 7y. \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 5x + y. \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} x' = 4x - 2y, \\ y' = x/2 + 2y. \end{cases} \quad \text{(d)} \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$$

$$\text{(e)} \begin{cases} x' = x - 10y, \\ y' = 5x - y. \end{cases} \quad \text{(f)} \begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -x - y. \end{cases} \quad \text{(g)} \begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = -5x + 7y. \end{cases} \quad \text{(h)} \begin{cases} x' = 9x - y, \\ y' = x + 7y. \end{cases}$$

Caso degenerado: $|\mathbf{A}| = 0$

Caso C: La matriz A es diagonalizable.

Es claro que la matriz **A** tiene a 0 como valor propio. Para que la matriz sea diagonalizable tiene que darse alguno de los siguientes casos. O bien 0 es un valor propio de multiplicidad dos con $\mathbb{R}^2$ como subespacio propio asociado, o bien existe un valor propio no nulo.

En el primer caso, existirá una matriz invertible **P** de manera que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces todos los puntos del plano son críticos y todas las órbitas son degeneradas, por lo que todas las soluciones son constantes.

En el segundo caso, dado que $|\mathbf{A}| = 0$, está claro que las filas de la matriz **A** son proporcionales, por lo que el sistema

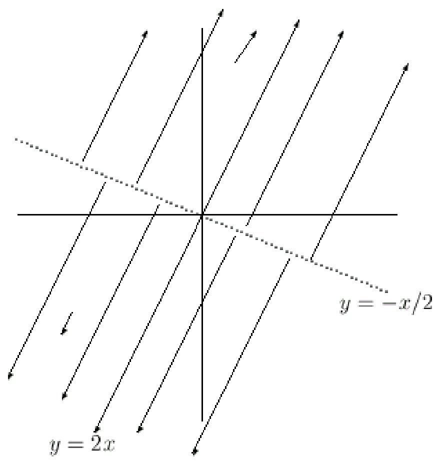
$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0, \end{cases}$$

tiene por solución los puntos de la recta $ax + by = 0$, o lo que es lo mismo, existirá una recta de puntos críticos. Además, no habrá isoclinas, dado que ambas coinciden en la recta anterior. Vamos a ver típicos ejemplos de diagramas de fase de este tipo de sistemas.

Ejemplo 9.20 Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + 4y. \end{cases}$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda$, por lo que los valores propios serán 0 y 5. La recta $x + 2y = 0$ será de puntos críticos, mientras que $y = 2x$ es el subespacio propio asociado al valor propio 5. Es fácil por otra parte ver que las integrales primeras, $y = 2x + c$, se calculan a partir de la ecuación $y' = 2$. Con esta información esbozamos el siguiente diagrama de fases.



Nótese que todas las órbitas excepto las degeneradas cumplen la condición

$$\lim_{t\to+\infty} ||(x(t), y(t)|| = \infty$$

y

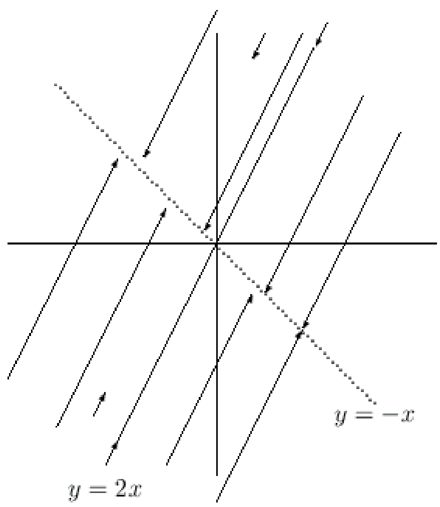
$$\lim_{t\to-\infty} ||(x(t), y(t)|| = 0.$$

■

Ejemplo 9.21 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = -2x - 2y. \end{cases}$$

En esta ocasión el polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda$, de donde los valores propios son 0 y -3. la recta $y = -x$ es de puntos críticos e $y = 2x$ es la recta asociada al valor propio -3. Al igual que en el ejemplo anterior, $y = 2x + c$ son las integrales primeras del sistema, con lo que esbozamos el siguiente diagrama de fases.

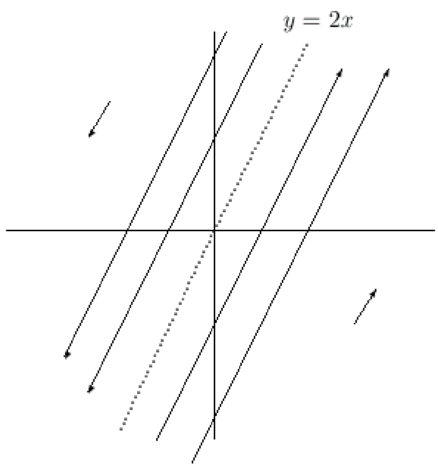


En este caso se cumple la relación
$$\lim_{t\to+\infty} ||(x(t), y(t)|| = 0$$
y
$$\lim_{t\to-\infty} ||(x(t), y(t)|| = +\infty.$$
■

Caso D: La matriz A no es diagonalizable.

La única posibilidad para este caso es que 0 sea un valor propio de **A** con multiplicidad dos de manera que el subespacio propio asociado tenga dimensión uno. Veamos en el siguiente ejemplo cómo se esbozaría el diagrama de fases de este último caso.

Ejemplo 9.22 Consideremos el sistema
$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 4x - 2y. \end{cases}$$
Como puede comprobarse fácilmente, el polinomio característico del sistema es $p(\lambda) = \lambda^2$, por lo que 0 es el único valor propio con subespacio propio asociado $y = 2x$, que será por tanto una recta de puntos críticos. De nuevo no existen isoclinas del sistema. Es fácil comprobar resolviendo la ecuación $y' = 2$ que $y = 2x + c$ son la integrales primeras del sistema. Esta información nos permite esbozar el siguiente diagrama de fases.



Nótese que
$$\lim_{t\to\pm\infty} ||(x(t), y(t)|| = +\infty.$$
■

Ejercicio 9.7 *Esbozar los diagramas de los siguientes sistemas lineales planos degenerados, indicando de qué tipo se trata*

$$(a) \begin{cases} x' = 2x + 2y, \\ y' = x + y. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = 0, \\ y' = x - y. \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -x - y. \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

Ejercicio 9.8 *Esbozar los diagramas de fase de los siguientes sistemas lineales planos, indicando su tipo*

$$(a)\left\{\begin{array}{l} x'=-x-4y, \\ y'=-2x+y. \end{array}\right. \quad (b)\left\{\begin{array}{l} x'=7x-5y, \\ y'=10x-7y. \end{array}\right. \quad (c)\left\{\begin{array}{l} x'=3x-y, \\ y'=5x-2y. \end{array}\right.$$

$$(d)\left\{\begin{array}{l} x'=2x-y, \\ y'=-x+2y. \end{array}\right. \quad (e)\left\{\begin{array}{l} x'=-7x+2y, \\ y'=x-8y. \end{array}\right. \quad (f)\left\{\begin{array}{l} x'=-x-y, \\ y'=x-3y. \end{array}\right.$$

$$(g)\left\{\begin{array}{l} x'=x-3y, \\ y'=-x-y. \end{array}\right. \quad (h)\left\{\begin{array}{l} x'=2x-2y, \\ y'=2x-2y. \end{array}\right. \quad (i)\left\{\begin{array}{l} x'=-2x+y, \\ y'=-x-2y. \end{array}\right.$$

9.5.2 Estabilidad de sistemas lineales

Si estudiamos con detenimiento los sistemas anteriores, podemos observar una relación entre los valores propios de de la matriz asociada al sistema y el comportamiento asintótico de las órbitas, esto es, el comportamiento de las órbitas para tiempos grandes. En particular observamos lo siguiente:

- Si existe algún valor propio con parte real positiva, entonces

  $$\lim_{t\to+\infty} ||(x(t),y(t)|| = \infty$$

  para toda órbita excepto la degenerada. Es el caso de los nodos inestables propio e impropio, punto de silla, foco inestable y el del ejemplo 9.20.

- Si todos los valores propios tienen parte real negativa, se tiene que

  $$\lim_{t\to+\infty} ||(x(t),y(t)|| = 0$$

  para toda órbita del sistema. Es el caso de los nodos estable propios e impropios, foco estable.

- Cuando tenemos que todos los valores propios tienen parte real menor o igual que cero, se tiene

  $$\lim_{t\to+\infty} ||(x(t),y(t)|| = 0$$

  para los casos del ejemplo 9.21, aparte de los mencionados en el punto anterior. Se tiene que

  $$\lim_{t\to+\infty} ||(x(t),y(t)|| = \infty$$

  para el ejemplo 9.22. El caso del centro (ejemplo 9.15) es diferente a todos los anteriores, ya que lo que se verifica es que cada órbita está acotada, es decir, $||(x(t),y(t)||$ no puede ser tan grande como uno desee una vez que se ha fijado una órbita concreta.

A primera vista vemos que la condición $\lim_{t\to+\infty} ||(x(t),y(t)|| = 0$ aparece ligada al adjetivo estable, mientras que la condición $\lim_{t\to+\infty} ||(x(t),y(t)|| = +\infty$ está mayoritariamente ligada al adjetivo inestable. Vamos a continuación a precisar estas ideas de establidad e inestabilidad, aunque intuitivamente, vemos que la condición $\lim_{t\to+\infty} ||(x(t),y(t)|| = 0$ indica un control de la órbita [cerca del $(0,0)$] cuando el tiempo es grande, mietras que la condición $\lim_{t\to+\infty} ||(x(t),y(t)|| = \infty$ indica justo lo contrario (ver la disparidad de diagramas de fases cumpliendo esta condición).

Definición 9.3 *Sea el sistema autónomo*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{9.3}$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *y* $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es una función con funciones coordenadas* $f_1, f_2, ..., f_n$*. Una solución* $\mathbf{y}(t)$ *de (9.3) definida para todo* $t \geq 0$ *se dice* estable *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $\mathbf{z}(t)$ *es otra solución que cumple la condición* $||\mathbf{y}(0) - \mathbf{z}(0)|| < \delta$ *entonces* $\mathbf{z}(t)$ *está definida para todo* $t \geq 0$ *y se verifica que* $||\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)|| < \varepsilon$ *para todo* $t \geq 0$*. Si además se verifica que*

$$\lim_{t\to\infty} ||\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)|| = 0$$

la solución $\mathbf{y}(t)$ *se dirá* asintóticamente estable*. La solución* $\mathbf{y}(t)$ *se dirá* inestable *si no es estable.*

Dado que los puntos críticos del sistema son soluciones degeneradas del mismo, se hablará de puntos críticos estables, asintóticamente estables e inestables. De los ejemplos anteriores vemos que el punto crítico de los ejemplos 9.15, 9.19, 9.17 y 9.13 son estables.

El ejemplo 9.15 pone de manifiesto que un punto crítico puede ser estable y no asintóticamente estable. Nótese que todos los ejemplos con el adjetivo de inestable en su nombre verifican que el punto crítico correspondiente no es estable. Además, puede verse en los ejemplos que todas las órbitas o soluciones del sistema son estables dependiendo de la estabilidad de los puntos críticos. De hecho, a la vista de la descripción de los diagramas de fases para los sistemas planos podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 9.4 *Sea el sistema lineal plano* $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{A} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *no nula. Entonces*

(a) El sistema es estable si para todo λ *valor propio de* $\mathbf{A}$ *se tiene que* $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ *y a lo sumo hay un valor propio nulo.*

(b) El sistema es asintóticamente estable si para todo λ *valor propio de* $\mathbf{A}$ *se verifica que* $\operatorname{Re}\lambda < 0$*.*

(c) El sistema es inestable si o bien 0 *es un valor propio de* $\mathbf{A}$ *con multiplicidad* 2*, o bien existe* λ *valor propio de* $\mathbf{A}$ *de manera que* $\operatorname{Re}\lambda > 0$*.*

Consideremos ahora un sistema lineal $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$ donde la matriz $\mathbf{A}$ tiene n filas y columnas. Aunque en este caso no disponemos de la representación de los diagramas de fases del mismo, sí que es posible determinar la estabilidad del mismo, con un resultado análogo al anterior. Para establecer el mismo, dada la matriz $\mathbf{A}$, denotaremos por $\lambda_1, ..., \lambda_k$ los valores propios de $\mathbf{A}$ con multiplicidades $m_1, ..., m_k$. Asímismo, denotaremos por $d_1, ..., d_k$ las dimensiones sobre $\mathbb{C}$ de los subespacios propios $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_n), ..., \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}_n)$.

Teorema 9.5 *Sea el sistema lineal plano* $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *no nula. Entonces*

(a) El sistema es estable si $\operatorname{Re}\lambda_i \leq 0$, $1 \leq i \leq k$, *y además si* λ_i *verifica que* $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$*, entonces* $d_i = m_i$*.*

(b) El sistema es asintóticamente estable si $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ *para todo* $i = 1, ..., k$*.*

(c) El sistema es inestable si o bien existe λ_i *tal que* $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$ *y* $m_i > d_i$*, o bien existe* λ_i *tal que* $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$.

Ejemplo 9.23 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y + 2z, \\ y' = -2x + y + 2z, \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases}$$

Es fácil ver que 1 y -1 son los valores propios de la matriz asociada al sistema, por lo que en virtud del Teorema 9.5 (c), éste es inestable. ■

Ejemplo 9.24 Sea ahora el sistema

$$\begin{cases} x' = -2x + y - z, \\ y' = x - 2y - z, \\ z' = -x + y - 2z. \end{cases}$$

Podemos ver ahora que los valores propios de la matriz asociada son -1, -2 y -3, por lo que por el Teorema 9.5 (b), el sistema es asintóticamente estable. ■

Ejemplo 9.25 Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = -4x + y + 3z, \\ y' = 2z, \\ z' = -2y. \end{cases}$$

Puede comprobarse que $\pm 2i$ y -4 son los valores propios de la matriz del sistema. Cómo las dimensiones de los subespacios propios de los valores propios $\pm i$ son 1 y coincide con la multiplicidad de éstos, por el Teorema 9.5 (a) y (b) el sistema será estable, aunque no será asintóticamente estable. ■

Ejercicio 9.9 *Dados los siguientes sistemas lineales, decidir si son estables o no.*

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = x - 5y + 5z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 3z. \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x' = -5x + y - z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = -3x + 3y - 3z. \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} x' = -x - 2z, \\ y' = 3x - 2y, \\ z' = 4x + z. \end{cases}$$

$$\text{(d)} \begin{cases} x' = -9x + y - 2z, \\ y' = 3x - 9y, \\ z' = 4x + y + z. \end{cases} \quad \text{(e)} \begin{cases} x' = -5x + y - z, \\ y' = -3x - y + 3z, \\ z' = -4x + 4y - 2z. \end{cases} \quad \text{(f)} \begin{cases} x' = -2x - 2y + 2z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = 0. \end{cases}$$

La aplicación del Teorema 9.5 tiene a priori un punto flaco puesto de manifiesto por el siguiente ejemplo. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -2x + y - 2z, \\ y' = 3x - 9y, \\ z' = 4x + y + z. \end{cases}$$

Este sistema coincide con el del apartado (d) del ejercicio anterior en todos los coeficientes de la matriz asociada excepto el primero. El polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda^3 - 10\lambda^2 - 12\lambda - 63$, pero resolver la ecuación $p(\lambda) = 0$ no resulta sencillo, y quizás ni siquiera factible para los conocimientos de los que se disponen. Ahora bien, para aplicar el Teorema 9.5 en la mayoría de los casos sólo necesitamos conocer los signos de las partes reales de los valores propios de la matriz asociada. Para este objetivo podemos usar el siguiente criterio de Routh-Hurwitz que, aunque no siempre es aplicable, supone una gran ayuda para determinar al menos si el sistema es asintóticamente estable.

Proposición 9.6 *Sea $p(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$ el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Las raíces de $p(\lambda)$ tienen parte real negativa si y sólo son estrictamente positivos los menores principales de la matriz*

$$\mathbf{H_A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & ... & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & ... & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & ... & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 9.26 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = 3x + y - 2z, \\ y' = -3x - y - z, \\ z' = -4x - y - z. \end{cases}$$

El polinomio característico de la matriz asociada es $p(\lambda) = 3 + 11x + x^2 - x^3$ y la matriz $\mathbf{H_A}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

cuyos menores principales son 1, 8 y 24. Está claro entonces que todos los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ tienen parte real negativa, por lo que el sistema será asintóticamente estable. ■

Ejercicio 9.10 *Determinar si es posible la estabilidad asintótica de los siguientes sistemas*

$$(a) \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x, \\ y' = \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}z, \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - z. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = -3x - y + z, \\ y' = x - 5y - z, \\ z' = 2x - 2y - 4z. \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x' = -\frac{5}{12}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z, \\ y' = \frac{5}{12}x - \frac{13}{12}y - \frac{5}{12}z, \\ z' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{5}{6}z. \end{cases}$$

9.5.3 ¿Por qué un sistema estable es útil en ingeniería?

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no autónomo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{f}(t),$$

donde $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y supongamos que el sistema autónomo asociado

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

es asintóticamente estable. Entonces toda solución del sistema autónomo

$$\mathbf{y}_h(t) = e^{\mathbf{A}\cdot t} \cdot \mathbf{C},\ \mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$$

verifica que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{y}_h(t) = \mathbf{0}.$$

Ahora bien, toda solución del sistema no autónomo es de la forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_h(t) + \mathbf{y}_p(t) \tag{9.4}$$

donde $\mathbf{y}_p(t)$ es una solución particular del sistema no homogéneo. Si tomamos límites cuando t tiende a infinito, tenemos que

$$\mathbf{y}(t) \simeq \mathbf{y}_p(t),$$

es decir, para tiempos grandes (aquí lo de grande depende de cada sistema) la solución del sistema no autónomo es básicamente la solución particular del mismo y la parte de la solución correspondiente al sistema homogéneo se va reduciendo con el tiempo. En ingeniería a la función $\mathbf{f}(t)$ se le llama entrada del sistema e $\mathbf{y}_p(t)$ es la salida del mismo. Si el sistema es estable, al variar la entrada, varía la salida sin que la parte homogénea intervenga en el proceso. Esto es lo que ocurre en la mayoría de los sistemas lineales utilizados en las ciencias experimentales, como en circuitos eléctricos o vibraciones mecánicas.

9.6 Estabilidad local de sistemas autónomos

9.6.1 Método de linealización de Lyapunov. Teorema de Hartman–Grobman

Analizaremos a continuación la estabilidad de puntos críticos de sistemas autónomos mediante un método que es comúnmente usado en las ciencias experimentales, el método de linealización. Supongamos un sistema autónomo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{9.5}$$

con $\mathbf{f}$ definido sobre el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto crítico aislado del mismo (un punto crítico es aislado si existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola abierta de centro $\mathbf{y}_0$ y radio ε no contiene puntos críticos aparte de $\mathbf{y}_0$). Consideremos el sistema linealizado dado por

$$\mathbf{y}' = \mathrm{J}\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{y}, \tag{9.6}$$

donde $\mathrm{J}\mathbf{f}(\mathbf{y}_0)$ es la matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{y}_0$. Por ejemplo consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = x^2 + 2x + y^2, \\ y' = -2x^3 + 2y. \end{cases}$$

Es evidente que $(0,0)$ es un punto crítico del sistema. La matriz Jacobiana en $(0,0)$ es

$$\mathrm{J}\mathbf{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y el sistema linealizado será

$$\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 2y. \end{cases}$$

Es de esperar que localmente (cerca del punto crítico $\mathbf{y}_0$), el comportamiento asintótico de los sistemas (9.5) y (9.6) sea parecido. Este parecido se precisará con el *Teorema de Hartman–Grobman*, para cuya compresión necesitaremos algunas definiciones previas.

En primer lugar necesitamos una herramienta para comparar localmente sistemas autónomos. Esta herramienta es la *conjugación topológica* [Jim, pag. 239]. Los sistemas (9.5) y (9.6) se dice topológicamente conjugados si existe una aplicación continua, biyectiva con inversa continua $\mathbf{h} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ verificando la condición $\mathbf{h}(\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)) = \mathbf{z}(t, \mathbf{h}(\mathbf{y}_0))$ para todo $\mathbf{y}_0 \in \Omega$ [aquí $\mathbf{z}(t, \mathbf{h}(\mathbf{y}_0))$ representa la solución maximal de (9.6) con condición inicial $\mathbf{h}(\mathbf{y}_0)$]. Si existen abiertos de $\mathbb{R}^n$ U y V de manera que son topológicamente conjugados los sistemas restringidos a estos abiertos, entonces los sistemas (9.5) y (9.6) se dirán *localmente topológicamente conjugados.* Para entendernos, una conjugación topológica lleva órbitas de un sistema en órbitas del otro sistema, preservando la orientación temporal.

La segunda definición que interviene en el enunciado del Teorema de Hartman–Grobman es el de *punto crítico hiperbólico.* Con la notación anterior $\mathbf{y}_0$ se dice hiperbólico si los valores propios de la matriz Jacobiana $\mathrm{J}\mathbf{f}(\mathbf{y}_0)$ tienen parte real no nula. En caso contrario $\mathbf{y}_0$ se dirá no hiperbólico. En el ejemplo anterior, el valor propio de la matriz Jacobiana es 2 con multiplicidad 2, por lo que $(0,0)$ es un punto crítico hiperbólico.

Teorema 9.7 ***(Hartman–Grobman)*** *Sea $\mathbf{y}_0$ un punto aislado crítico hiperbólico de (9.5). Entonces existen entornos U de $\mathbf{y}_0$ y V de $\mathbf{0}$ tales que los sistemas (9.5) y (9.6) son localmente topológicamente conjugados.*

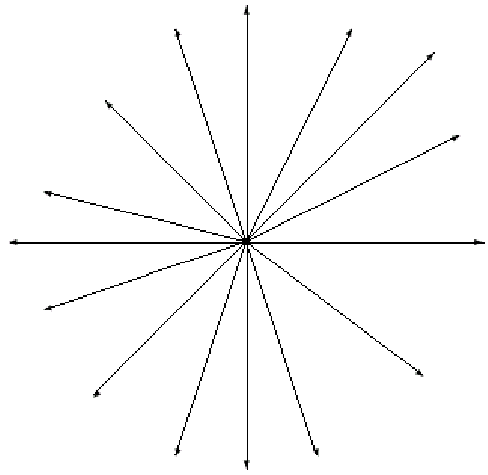
En virtud del teorema anterior sabemos que los sistemas

$$\begin{cases} x' = x^2 + 2x + y^2, \\ y' = -2x^3 + 2y. \end{cases}$$

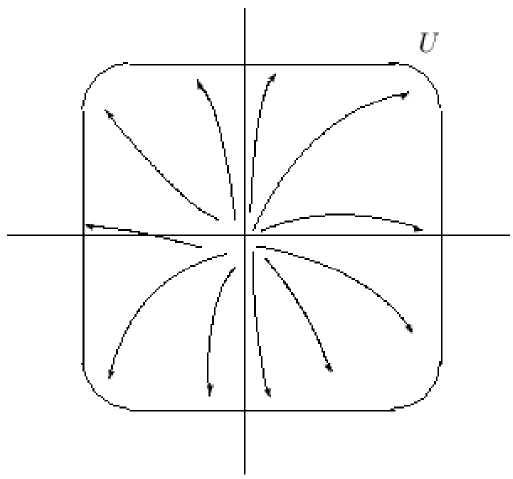
y

$$\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 2y, \end{cases}$$

son localmente topológicamente conjugados en un entorno del punto $(0,0)$. Así, si el diagrama de fases del sistema linealizado es (ver ejemplo 9.14)



sin conocer exactamente las órbitas del sistema no linealizado sabemos que cerca de $(0,0)$ se obtienen "deformando" de forma continua las órbitas del sistema linealizado, como por ejemplo muestra la siguiente figura:



Obsérvese como en el dibujo las rectas del sistema linealizado son deformadas y transformadas en curvas. Además, como la orientación temporal se conserva, la estabilidad del punto crítico puede estudiarse a partir del sistema no linealizado. Así, el punto crítico $(0,0)$ es inestable para el sistema no linealizado dado que es inestable para el sistema linealizado.

Hemos de enfatizar el carácter local del Teorema de Hartman–Grobman. Por ejemplo consideramos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -x, \\ y' = 1 - x^2 - y^2, \end{array} \right. \tag{9.7}$$

con dos puntos críticos hiperbólicos, $(0,1)$ y $(0,-1)$. A partir del resultado anterior vemos que $(0,1)$ es asintóticamente estable y $(0,-1)$ es inestable, pero obviamente el sistema (9.7) no puede ser globalmente conjugado a los sistemas $\mathbf{y}' = \mathbf{J}\mathbf{f}(0,1)\cdot\mathbf{y}$ o $\mathbf{y}' = \mathbf{J}\mathbf{f}(0,-1)\cdot\mathbf{y}$, dado que éstos sólo tienen un punto crítico.

Ejercicio 9.11 *Obtener los puntos críticos de los siguientes sistemas y determinar si son o no hiperbólicos:*

$$(a)\left\{\begin{array}{l} x' = x - xy \\ y' = -y + y^2 \end{array}\right. \quad (b)\left\{\begin{array}{l} x' = y \\ y' = -x + x^3 \end{array}\right. \quad (c)\left\{\begin{array}{l} x' = x - xy \\ y' = x - y \end{array}\right. \quad (d)\left\{\begin{array}{l} x' = y \\ y' = x^3 \end{array}\right.$$

$$(e)\left\{\begin{array}{l} x' = y - e^x \\ y' = y + e^{-x} \end{array}\right. \quad (f)\left\{\begin{array}{l} x' = -x \\ y' = 1 - x^2 - y^2 \end{array}\right. \quad (g)\left\{\begin{array}{l} x' = -x^2 + xy - x + y \\ y' = -x^2 + y^2 + x - 4y + 2 \end{array}\right.$$

Ejercicio 9.12 *Determinar las isoclinas de los sistemas del ejercicio 9.11, así como la dirección del vector velocidad a las órbitas en las regiones que las isoclinas determinan.*

Ejercicio 9.13 *Obtener el sistema linealizado en los puntos críticos de los sistemas del ejercicio 9.11. Determinar su diagrama de fases e indicar si es posible la naturaleza del punto crítico en un entorno del mismo.*

Ejercicio 9.14 *Esbozar el diagrama de fases de los siguientes sistemas no lineales:*

$$(a)\left\{\begin{array}{l} x' = y(2 - y) \\ y' = (x - 2)(y - 2) \end{array}\right. \quad (b)\left\{\begin{array}{l} x' = y \\ y' = xy^2 \end{array}\right. \quad (c)\left\{\begin{array}{l} x' = xy \\ y' = x^2 \end{array}\right.$$

Ejercicio 9.15 *Consideremos la ecuación de Van Der Pol*

$$x'' + x - \varepsilon x'(1 - x^2) = 0$$

donde ε es un parámetro real. Transformar dicha ecuación en un sistema plano y determinar los puntos críticos del mismo. Determinar la naturaleza de los puntos críticos en función del parámetro ε.

Ejercicio 9.16 *Idem para la ecuación*

$$x'' + 2\varepsilon x' + (1 - \varepsilon^2)x = 0.$$

Ejercicio 9.17 *Sea el sistema*

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x + (\varepsilon + 1)y \\ y' = 2(\varepsilon - 1)x + y \end{array}\right.$$

donde ε es un parámetro real. Se pide:

(a) Discutir la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema en función del parámetro ε.

(b) Esbozar el diagrama de fases del sistema para el valor $\varepsilon = 1$.

9.6.2 El método directo de Lyapunov

Aunque el Teorema de Hartman–Grobman proporciona una herramienta útil para distinguir la estabilidad de puntos críticos hiperbólicos, resulta ineficaz para tratar la misma cuestión con puntos críticos no hiperbólicos. Una opción alternativa válida también en el caso de no hiperbolicidad es el *método directo de Lyapunov*, de clara inspiración física. Consideremos nuevamente el sistema autónomo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{9.8}$$

y sea $\mathbf{y}_0$ un punto crítico, hiperbólico o no, del mismo. El método directo de Lyapunov consiste en encontrar una función escalar $V : U \to \mathbb{R}$, con U un entorno de $\mathbf{y}_0$, satisfaciendo ciertas condiciones. Esta función puede ser considerada como una medida de la "energía potencial" del sistema, de manera que a lo largo de las órbitas ésta decrece cuando $t \to \infty$, indicando estabilidad, o bien crece, indicando inestabilidad. Precisemos a continuación estas ideas.

Dada una solución $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de (9.8), la derivada de V a lo largo de $\mathbf{y}(t)$ es

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{y}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{y}(t))}{\partial y_i} y_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{y}(t))}{\partial y_i} f_i(\mathbf{y}(t)) = \mathrm{grad} V(\mathbf{y}(t)) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)),$$

donde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ y $\mathrm{grad}V$ denota el gradiente de V. Definimos entonces la derivada total de V como

$$\dot{V}(\mathbf{y}) := \mathrm{grad}V(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

El siguiente resultado nos garantiza la estabilidad del punto crítico en cuestión.

Teorema 9.8 *Sean $\mathbf{y}_0$ un punto crítico del sistema (9.8) y $V : U \to \mathbb{R}$, con U un entorno de $\mathbf{y}_0$, continua en U y derivable en $U \backslash \{\mathbf{y}_0\}$. Supongamos que $V(\mathbf{y}_0) = 0$ y $V(\mathbf{y}) > 0$ para todo $\mathbf{y} \in U \backslash \{\mathbf{y}_0\}$. Entonces*

(a) Si $\dot{V}(\mathbf{y}) \leq 0$ para todo $\mathbf{y} \in U \setminus \{\mathbf{y}_0\}$, entonces $\mathbf{y}_0$ es estable.

(b) Si $\dot{V}(\mathbf{y}) < 0$ para todo $\mathbf{y} \in U \setminus \{\mathbf{y}_0\}$, entonces $\mathbf{y}_0$ es asintóticamente estable.

Si V satisface las condición (a) [resp. (b)] del resultado anterior, se dirá una *función de Lyapunov para* $\mathbf{y}_0$ [resp. una *función de Lyapunov estricta para* $\mathbf{y}_0$]. Por ejemplo, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y - x^3, \\ y' = -x. \end{array} \right.$$

Es claro que $(0,0)$ es un punto crítico aislado del sistema. La matriz Jacobiana en dicho punto es

$$\mathbf{Jf}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que como puede comprobarse tiene por valores propios $\pm i$, por lo que dicho punto crítico no es hiperbólico. Vamos a comprobar que la función $V(x,y) = x^2 + y^2$ es una función de Lyapunov estricta para el mismo, por lo que $(0,0)$ será un punto crítico asintóticamente estable. En primer lugar, está claro que $V(0,0) = 0$ y $V(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Por otra parte, la derivada total es

$$\dot{V}\,(x,y) = \mathrm{grad}V(x,y) \cdot \mathbf{f}(x,y) = (2x, 2y) \cdot (y - x^3, -x) = -2x^4 \leq 0$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En virtud del Teorema 9.8 el punto crítico es estable.

También la inestabilidad de los puntos críticos puede ser discutida, según muestra el siguiente resultado.

Teorema 9.9 *Sean* $\mathbf{y}_0$ *un punto crítico del sistema (9.8) y* D *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *conteniendo a* $\mathbf{y}_0$ *en su frontera* $\mathrm{Fr}(D)$. *Supongamos que existe una función* $V : U \to \mathbb{R}$, *con* U *un entorno de* $\mathbf{y}_0$, *con* $D \cup \mathrm{Fr}(D) \subset U$, *de clase* C^1 *y tal que* $V(\mathbf{y}) > 0$ *y* $\dot{V}\,(\mathbf{y}) > 0$ *para todo* $\mathbf{y} \in D$, *y* $V(\mathbf{y}) = 0$ *si* $\mathbf{y} \in \mathrm{Fr}(D)$. *Entonces* $\mathbf{y}_0$ *es inestable.*

Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} x' = y + x^3, \\ y' = x. \end{cases}$$

Sea la función $V : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ |y| < x\}$ y $V(x,y) = x^2 - y^2$. Es fácil darse cuenta de que $V(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \in D$, y que la derivada total

$$\dot{V}\,(x,y) = \mathrm{grad}V(x,y) \cdot \mathbf{f}(x,y) = (2x, -2y) \cdot (y + x^3, x) = 2x^4 > 0$$

para todo $(x,y) \in D$. Además $(0,0) \in \mathrm{Fr}(D)$ y $V(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \mathrm{Fr}(D)$. Por el Teorema 9.9 el punto crítico $(0,0)$ es inestable.

La principal desventaja de este método, que de hecho hace que su utilización sea cuando menos limitada, es la dificultad en encontrar la función V.

Ejercicio 9.18 *Sea el sistema*

$$\begin{cases} x' = -x + 2x(x+y)^2 \\ y' = -y^3 + 2y^3(x+y)^2. \end{cases}$$

Determinar los puntos críticos del mismo y su hiperbolicidad. Determinar la naturaleza del punto crítico $(0,0)$ *a partir de la función* $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Ejercicio 9.19 *Idem para el sistema*

$$\begin{cases} x' = y - xy^2 \\ y' = -x^3 \end{cases}$$

y la función $V(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2$.

Ejercicio 9.20 *Idem con el sistema*

$$\begin{cases} x' = x^3 - x - y \\ y' = x \end{cases}$$

y la función $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Ejercicio 9.21 *Idem con el sistema*

$$\begin{cases} x' = x + x^2 + xy + y^2 \\ y' = x^2 + xy + y^2 \end{cases}$$

y la función $V(x, y) = x^2 - y^2$ *definida sobre el conjunto del plano real* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |y| < x\}$.

Ejercicio 9.22 *Un sistema*

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases}$$

se dice Hamiltoniano si existe una función derivable $H(x, y)$ *tal que* $f_1(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$ *y* $f_2(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y)$*, de tal manera que* H *es una integral primera del sistema. Se puede comprobar que para un punto crítico de un sistema Hamiltoniano, las funciones de Lyapunov pueden construirse sumando una constante a la función* H*. Con esta idea, verificar el carácter de los puntos críticos del sistema*

$$\begin{cases} x' = y - y^2 \\ y' = x - x^2 \end{cases}$$

9.7 Aplicaciones de la teoría cualitativa

9.7.1 El péndulo con y sin rozamiento

Los métodos de linealización y directo de Lyapunov pueden usarse para describir el comportamiento de un péndulo una vez a sido desplazado ligeramente de su posición de equilibrio. Se seguirá para ello [HiSm, pag. 260–263 y 278–279].

Consideremos un péndulo de masa m que se mueve en un plano vertical. Despreciemos la masa de la varilla (rígida) que lo soporta y suponemos que existe una fuerza de rozamiento opuesta al movimiento y proporcional a la velocidad del péndulo. Sea l la longitud de la varilla, de manera que el péndulo se mueve a lo largo de una circunferencia de radio l. Sea $\theta(t)$ el ángulo entre la vertical y la varilla en el instante de tiempo t, medido en sentido contrario al de las agujas del reloj. Entonces las velocidades angular y lineal son respectivamente $\omega(t) = \theta'(t)$ y $v(t) = l\omega(t)$. La fuerza de rozamiento es $-kl\theta'(t)$, $k > 0$, siendo esta fuerza tangente a la circunferencia. Por otra parte la fuerza gravitatoria vertical tiene una componente tangente a la circunferencia de módulo $-mg \sin\theta(t)$. Por la segunda ley de Newton

$$mv' = ml\theta'' = -kl\theta' - mg \sin\theta(t),$$

equivalente al sistema

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = -\dfrac{g}{l}\sin\theta - \dfrac{k}{m}\omega. \end{cases}$$

El $(0, 0)$ es un punto crítico del sistema. Si se hace $\mathbf{f}(\theta, \omega) = \left(\omega, -\dfrac{g}{l}\sin\theta - \dfrac{k}{m}\omega\right)$, entonces

$$\mathrm{J}\mathbf{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{k}{m} \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{k}{m} \pm \left[\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l}\right]^{1/2}\right),$$

que tienen parte real negativa. El sistema será siempre asintóticamente estable en el origen.

Si suponemos que no hay rozamiento ($k = 0$), podemos usar el método directo de Lyapunov con la energía del sistema

$$E(\theta, \omega) = \frac{1}{2} ml^2\omega^2 + mgl(1 - \cos\theta),$$

donde hemos supuesto que el punto mas bajo del péndulo está a ras de suelo. Se comprueba fácilmente que la derivada total de E es nula y por tanto ésta es una función de Lyapunov para el origen, por lo que el sistema es estable.

9.7.2 La ecuación de Van der Pol

La ecuación de Van der Pol puede obtenerse a partir de un caso particular de circuito eléctrico que contiene un triodo o tubo de vacío (ver [NaSa, pag. 566]), proporcionando la ecuación

$$x'' + \mu(1 - x^2)x' + x = 0,$$

donde μ es un parámetro real. Escribiendo la ecuación en la forma

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + \mu(x^2 - 1)y, \end{cases}$$

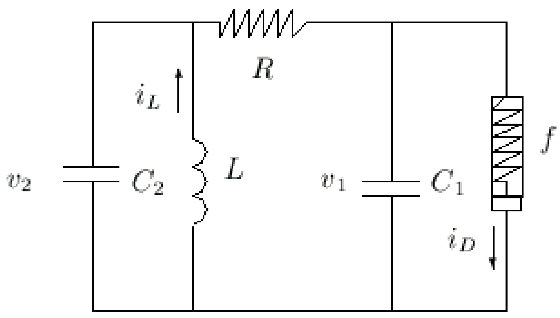
y suponiendo que $\mathbf{f}(x, y) = (y, -x + \mu(x^2 - 1)y)$, tenemos que $\mathbf{f}(0, 0) = (0, 0)$, por lo que es un punto crítico y

$$\mathrm{J}\mathbf{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos aplicando el Teorema de Hartman–Grobman que dicho punto será asintóticamente estable si $\mu < 0$ e inestable si $\mu > 0$. El caso $\mu = 0$ puede discutirse directamente proporcionando un centro y por tanto un punto crítico estable.

9.7.3 El circuito de Chua

El circuito de Chua es un circuito electrónico simple como se muestra en la figura



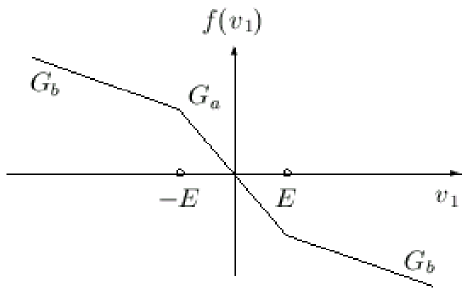
donde se introduce un elemento llamado diodo de Chua que se modeliza por una función lineal a trozos (ver [GSCO]). Las ecuaciones diferenciales que describen el circuito vienen dadas por

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = \dfrac{1}{C_1}[G(v_2 - v_1) - f(v_1)], \\ \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{1}{C_2}[G(v_1 - v_2) + i_L], \\ \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{1}{C_1}v_2, \end{cases}$$

donde $G = 1/R$ y

$$f(v_1) = G_b v_1 + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|v_1 + E| - |v_1 - E|),$$

donde E es el punto de ruptura del voltaje del diodo y $G_b < 0$, $G_a < 0$.



Haciendo $x_1 = v_1/E$, $x_2 = v_2/E$, $x_3 = i_L/(EG)$, $\alpha = C_2/C_1$ y $\beta = 1/(LG)$ y teniendo en cuenta que entonces

$$f(x_1) = m_0 x_1 + 0.5(m_1 - m_0)(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)$$

con $m_0 = RG_b$ y $m_1 = RG_a$, tenemos que el sistema se escribe como

$$\begin{cases} x_1' = \alpha(-x_1 + x_2 - f(x_1)), \\ x_2' = x_1 - x_2 + x_3, \\ x_3' = -\beta x_2. \end{cases}$$

Se comprueba entonces que $(0,0,0)$ es un punto crítico del sistema tal que

$$\mathbf{Jf}(0,0,0) = \begin{pmatrix} -\alpha(1+m_0) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

siendo $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (\alpha(-x_1 + x_2 - f(x_1)), x_1 - x_2 + x_3, -\beta x_2)$. Si tomamos los parámetros en la forma (α, m_0, β), se verifica que los siguientes valores $(3/4, -2, 1)$ y $(9/10, -3, 3)$ proporcionan la inestabilidad del punto crítico, mientras que $(3/4, 0, 3)$ proporciona la estabilidad asintótica del mismo.

Bibliografía

[Ayr] F. Ayres Jr., *Ecuaciones diferenciales. Teoría y 560 problemas resueltos,* Schaum McGraw–Hill, 1970.

[BaJi] F. Balibrea Gallego y V. Jiménez López, *Ecuaciones diferenciales para las ciencias químicas y físicas,* DM Editor y Universidad de Murcia 2000.

[BoPr] W. E. Boyce y R. C. DiPrima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera,* Limusa, Mexico, 1996.

[Bra] M. Braun, *Differential equations and their applications,* Springer–Verlag, Berlin, 1993.

[DeGr] W. R. Derrick y S. I. Grossman, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones,* Fondo Educativo Interamericano, 1984.

[GSCO] S. Guo, L. S. Shieh, G. Chen y M. Ortega, *Ordering chaos in Chua's circuit: a sampled–data feedback and digital redesign approach,* International Journal of Bifurcations and Chaos **10** (2000), 2221–2231.

[HiSm] M. W. Hirsch y S. Smale, *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal,* Alianza Editorial, 1983.

[IzTo] J. Izquierdo y J. R. Torregrosa, *Algebra y ecuaciones diferenciales,* Servicio de publicaciones, Universidad Politéctica de Valencia, 1991.

[Jef] A. Jeffrey, *Linear algebra and ordinary differential equations,* CRC Press, 1993.

[Jim] V. Jiménez López, *Apuntes de ecuaciones diferenciales,* Servicio de publicaciones, Universidad de Murcia, 2000.

[KKM] A. Kiseliov, M. Krasnov y G. Makarenko, *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias,* Mir 1988.

[MCZ] F. Marcellán, L. Casasús y A. Zarzo, *Ecuaciones diferenciales. Problemas lineales y aplicaciones,* McGraw–Hill, 1990.

[NaSa] R. K. Nagle y E. B. Saff, *Fundamentos de ecuaciones diferenciales (*2^a edición*),* Addison Wesley Longman, 1992.

[NOR] S. Novo, R. Obaya y J. Rojo, *Ecuaciones y sistemas diferenciales,* AC, Madrid, 1992.

[Oma] R. E. O'Malley Jr., *Thinking about ordinary differential equations,* Cambridge University Press 1997.

[PeTo] V. M. Pérez García y P. J. Torres, *Problemas de ecuaciones diferenciales,* Ariel Practicum, 2001.

[Pui] P. Puig Adam, *Curso teórico práctico de ecuaciones diferenciales aplicado a la física y la técnica,* Biblioteca Matemática, Madrid, 1967.

[Sim] G. F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales (con aplicaciones y notas históricas), 2ª Edición,* McGraw–Hill, 1993.

[Var] J. L. Varona Malumbres, *Métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias,* Servicio de publicaciones, Universidad de La Rioja, 1996.