1. Resolver : $\begin{cases} 3x+2y-z=12 \\ 2x+y+5z=9 \\ x+y+z=6 \end{cases}$

Solución.

Al sistema lo definen dos matrices, A la matriz de coeficientes y A' la matriz ampliada.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \; A'=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} : \; A \subset A' \Rightarrow \text{rg } A \le \text{rg } A' \le n = 3$$

Rango de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \ne 0 : \; \text{rg } A = 3 = \text{rg } A' = n \quad \text{S.C.D. (método de Cramer)}$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|} : \quad y=\frac{|A_y|}{|A|} : \quad z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 & -1 \\ 9 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|-7|}=\frac{-9}{-7}=\frac{9}{7} : \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 12 & -1 \\ 2 & 9 & 5 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{|-7|}=\frac{-30}{-7}=\frac{30}{7} : \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{|-7|}=\frac{-3}{-7}=\frac{3}{7}$$

2. Resolver : $\begin{cases} 2x-y+2z=5 \\ x+2y=5 \\ 3x+y+z=10 \end{cases}$

Solución.

Al sistema lo definen dos matrices, A la matriz de coeficientes y A' la matriz ampliada.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \; A'=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} : \; A \subset A' \Rightarrow \text{rg } A \le \text{rg } A' \le n = 3$$

Rango de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \ne 0 : \; \text{rg } A = 3 = \text{rg } A' = n \quad \text{S.C.D. (método de Cramer)}$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|} : \quad y=\frac{|A_y|}{|A|} : \quad z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 10 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|-5|}=\frac{-15}{-5}=3 : \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{-5}{-5}=1 : \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 10 \end{vmatrix}}{|-5|}=\frac{0}{-5}=0$$

3. Resolver : $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+5z=12 \\ x+4y+25z=36 \end{cases}$

Solución.

Sistema compatible determinado. Sistema de Cramer.

$$x=3 : y=2 : z=1$$

4. Resolver : $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y + z = -6 \\ 4x - 2y + 2z = 4 \\ 5x + y + 3z = -2 \end{cases}$

Solución.

Al sistema lo definen dos matrices, A matriz de coeficientes y A' matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} : \ A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} : \ A \subset A' \Rightarrow \text{rg } A \le 3 \,;\, \text{rg } A' \le 4 \,;\, n = 3$$

Rango de A:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \ne 0 : \quad \text{rg } A \ge 2$$

a partir de menor anterior, se obtienen dos menores orlados de orden 3

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 : \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 : \quad \text{rg } A < 3$$

por conclusión rg A = 2

Rango de A'

Partiendo del menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \ne 0$ aparecen cuatro menores orlados de orden tres, de los cuales, dos son los anteriores, que son nulos, y los otros dos son

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -6 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 : \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -6 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

que por ser también nulos indican que el rg A' < 3. por lo tanto el rg A' = 2.

rg A = rg A' = 2 < n = 3 $\Rightarrow$ S.C.D. con un grado de indeterminación

El rango de un sistema indica el número de ecuaciones linealmente independientes.

Grados de indeterminación ó grados de libertad de un sistema es la diferencia entre el número de incógnitas del sistema y el rango del sistema. (3−2 = 1) Indica el número de parámetros necesarios para resolver el sistema

Sistema equivalente (S') es el formado únicamente por las ecuaciones linealmente independientes. Para escoger la ecuaciones linealmente independientes del sistema, se seleccionan las ecuaciones que contienen a los términos del mayor *menor* distinto de cero que exista en la matriz de coeficientes.

$$S' \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y + z = -6 \end{cases}$$

Tomando como parámetro cualquier variable, en este caso si se toma como parámetro la variable y = λ, el sistema queda más sencillo. Ordenando

$$S' \equiv \begin{cases} 2x + z = 2 + \lambda \\ x + z = -6 - 3\lambda \end{cases}$$

resolviendo por Cramer

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} : \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 \\ -6-3\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{8+4\lambda}{1} = 8+4\lambda : \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2+\lambda \\ 1 & -6-3\lambda \end{vmatrix}}{|1|} = -14-7\lambda$$

$$S': \begin{cases} x = 8+4\lambda \\ y = \lambda \quad \forall\lambda \in \Re \\ z = -14-7\lambda \end{cases}$$

5. Resolver : $\begin{cases} x+y+z=3 \\ -y+z=0 \end{cases}$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \subset A^* \Rightarrow RgA \le RgA^* \le 2; \quad n = 3$$

Rango de A:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow RgA = 2$

Teniendo en cuenta que Rg A ≤ Rg A* y este no puede ser menor que dos por las dimensiones de A*:

$$RgA = RgA^* = 2n = 3$$

Grado de indeterminación: $n - rgA = 3 - 2 = 1$

Sistema Compatible Indeterminado con un grado de indeterminación.

El sistema se resuelve en función de variables que se consideran constantes, para a continuación cambiarla por un parámetro.

Tomando la y como constante: $\begin{cases} x+y=3-y \\ z=y \end{cases}$

Sustituyendo la segunda en la primera:

$$x+y=3-y; \quad x=3-2y$$

haciendo $y = \lambda$ se obtiene el conjunto solución:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3-2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \forall\lambda \in \Re$$

6. Resolver : $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+3y+4z=0 \\ x+z=3 \\ 2x-y+2z=6 \end{cases}$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \subset A^*; RgA \le 3; RgA^* \le 4; n = 3$$

Rango A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{RgA} \geq 2$$

Para comprobar si la matriz de coeficientes tiene rango tres solo se estudia los menores orlados del determinante anterior, que son:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{C_3 = C_3 - C_1\} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 16 - 3 - (18 - 4 + 4) = 1 \neq 0$$

$$\text{Rg A} = 3$$

Rango de A*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rg A*} < 4$$

Como Rg A ≤ Rg A* y Rg A = 3, Rg A = Rg A* = 3 = n; Sistema Compatible Determinado.
Hay que seleccionar las ecuaciones linealmente independientes tomando como referencia el menor de orden 3 que define el rango del sistema.

$$S': \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 0 \\ 2x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = 4 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = 0 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = -1$$

Los determinantes se resuelven por Sarrus.

7. Resolver : $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x + 4y + 5z = -2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \vdots & 7 \\ 2 & 4 & 5 & \vdots & -2 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \subset A^* \Rightarrow \text{RgA} \leq \text{RgA*} \leq n = 3$$

Rango de A:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10 \neq 0 \Rightarrow \text{RgA} \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 = C_1 - C_3 \\ C_2 = C_2 - C_3 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{RgA} < 3 \Rightarrow \text{RgA} = 2$$

Rango de A*:
Tomando como referencia el menor de orden 2 que determino el rango de la matriz A, buscamos sus menores orlados.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_2 = C_2 - C_1 \\ C_3 = C_3 - C_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{Rg } A^* = 2$$

$$\text{Rg}A = \text{Rg}A^* = 2 < n = 3$$

Grado de indeterminación: $n - \text{Rg } A = 3 - 2 = 1$

Sistema compatible indeterminado con un grado de indeterminación.
Para resolver el sistema habrá que seleccionar las ecuaciones linealmente independientes, en este caso dos ya que el rango del sistema es dos y luego habrá que tomar una variable como constante, expresar las otras en función de esta y por último cambiarla por un parámetro.

Las ecuaciones linealmente independientes se pueden obtener del menor que definió el rango del sistema. En este caso dicho menor está formado por coeficientes de las dos primeras ecuaciones, por lo tanto el sistema equivalente será el formado por la primera y segunda ecuación.

$$S': \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x + 4y + 5z = -2 \end{cases}$$

Tomando la x como constante: $\begin{cases} y = 7 - 3x \\ 4y + 5z = -2 - 2x \end{cases}$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7-3x & 0 \\ -2-2x & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot (7-3x) - 0}{5} = 7 - 3x$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7-3x \\ 4 & -2-2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-2-2x-28+12x}{5} = \frac{-30+10x}{5} = -6 + 2x$$

Sustituyendo x por λ se obtiene el componente solución:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 - 3\lambda \qquad \forall \lambda \in \Re \\ z = -6 + 2\lambda \end{cases}$$

8. Resolver : $\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ x-2y+4z=2 \\ 3x+10y-14z=4 \end{cases}$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 10 & -14 \end{pmatrix};\quad A^*=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & -14 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A\subset A^*\Rightarrow RgA\le RgA^*\le n=3$$

Rango de A: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-7\neq 0:$ rg A ≥ 2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 10 & -14 \end{vmatrix}=0$ rg A < 3. rg A = 2

Rango de A': Teniendo en cuenta que rg A = 2, rg A' ≥ 2. Orlando el menor $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$, aparecen dos menores de orden 3, uno de ellos es el determinante de la matriz de coeficientes, que es nulo, y el otro es $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix}=-64\neq 0$ por lo tanto rg A' = 3

rg A = 2 ≠ rg A' = 3. Sistema INCOMPATIBLE

9. Resolver: $\begin{cases} x+y=7 \\ y+z=4 \\ z+t=2 \\ t+s=7 \\ x+s=6 \end{cases}$

Solución:

Dadas la dimensiones del sistema 5×5, en este caso se recomienda aplicar el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{E_5=E_5-E_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_5=E_5+E_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_5=E_5-E_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_5=E_5+E_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Sistema compatible determinado

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ y+z=4 \\ z+t=2 \\ t+s=7 \\ 2s=8 \end{cases}:s=4:\begin{cases} x+y=7 \\ y+z=4 \\ z+t=2 \\ t+4=7 \end{cases}:t=3:\begin{cases} x+y=7 \\ y+z=4 \\ z+3=2 \end{cases}:z=-1:\begin{cases} x+y=7 \\ y-1=4 \end{cases}:y=5:\{x+5=7:x=2$$

10. Resolver: $\begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ 3x+2y+4z=13 \\ x+5y-3z=-13 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 13 \\ 1 & 5 & -3 & -13 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A \subset A' \Rightarrow \text{rg } A \le 3 \le \text{rg } A' \le n=4$$

rango de A: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-7\neq 0:\text{rg } A\ge 2.\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}=0:\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=20\neq 0:\text{rg } A=3$

rango de A': Puesto que A es una submatriz de A', solo queda por estudiar si A' puede tener rango 4. Si el determinante de A' es distinto de cero el rango de A' será cuatro, sí es cero, será 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 13 \\ 1 & 5 & -3 & -13 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} C_1=C_1-2C_2 \\ C_3=C_3+C_2 \\ C_4=C_4-2C_2 \end{Bmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & 3 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & 6 & 9 \\ -9 & 5 & 2 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -1 & 6 & 9 \\ -9 & 2 & -23 \end{vmatrix}=0:\text{rg } A'=3$$

rg A = rg A' = n = 3. Sistema compatible determinado

Sistema equivalente(S'): formado por la ecuaciones que contienen a los coeficientes del menor de orden tres distinto de cero, en este caso la 1ª, 2ª y 4ª.

$$S':\begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ 3x+2y+4z=13 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$$

Se resuelve mediante el método de Cramer:

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=20:\begin{cases} x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 13 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{20}=\dfrac{60}{20}=3 \\[2ex] y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 13 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{20}=\dfrac{-40}{20}=-2 \\[2ex] z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 13 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{20}=\dfrac{40}{20}=2 \end{cases}$$

11. Resolver: $\begin{cases} 2x+y+z+t=2 \\ x+2y+z+t=2 \\ x+y+2z+t=2 \\ x+y+z+2t=2 \end{cases}$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A\subset A' \Rightarrow \text{rg } A \le \text{rg } A' \le n=4$$

Rango de A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \ne 0 : \text{rg } A \ge 2. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \ne 0 : \text{rg } A' \ge 3. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \{F_4 = F_4+F_3+F_2+F_1\} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 = F_1 - F_4 \\ F_2 = F_2 - F_4 \\ F_3 = F_3 - F_4 \end{Bmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot 1 = 5 \ne 0 : \text{rg } A = 4$$

Teniendo en cuenta las dimensiones de $A'_{4\times5}$ y que A es una submatriz de A'

rg A = rg A' = n = 4. Sistema compatible determinado

La solución se obtiene por el método de Cramer.

$$x=\frac{|A_x|}{|A|} \ : \ y=\frac{|A_y|}{|A|} \ : \ z=\frac{|A_z|}{|A|} \ : \ t=\frac{|A_t|}{|A|} \ : \ |A|=5$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ F_4 = F_4 - F_1 \end{Bmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

operando de la misma forma con los otros tres determinantes se obtiene el mismo resultado

$$|A_y| = 2 \ : \ |A_z| = 2 \ : \ |A_t| = 2$$

sustituyendo el valor de los determinantes donde corresponde se obtiene la solución

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{2}{5} \ : \ y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{2}{5} \ : \ z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{2}{5} \ : \ t=\frac{|A_t|}{|A|}=\frac{2}{5}$$

12. Resolver: $\begin{cases} x+2y+3z+t-6=0 \\ -x-3y+z-2t+1=0 \\ 3x-y+z-2=0 \\ 5x+4y+3z+3t-9=0 \end{cases}$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad A\subset A' \Rightarrow \text{rg } A \le \text{rg } A' \le n=4$$

Rango de A: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \ne 0 : \text{rg } A \ge 2.$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 36 \ne 0 : \text{rg } A' \ge 3.$ Para saber si tiene rango 4, se estudia el determinante de la matriz A, que por ser de orden 4, se reduce a orden 3 haciendo ceros en la cuarta columna utilizando como pivote el término $a_{1.4}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 + 2F_1 \\ F_4 = F_4 - 3F_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 0 : \text{rg } A < 4$$

rg A = 3

Rango de A’: Puesto que rg A = 3, rg A’ ≥ 3. Para estudiar si la matriz ampliada tiene rango 4, se orla el menor de orden tres distinto de cero $\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right)$. De los dos menores orlados, uno es el determinante de la matriz de coeficientes, que es cero, el otro es el formado por la 1ª, 2ª,3ª y 5ª columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 = C_1 + C_3 \\ C_2 = C_2 + 3C_3 \\ C_4 = C_4 + C_3 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 11 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 13 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 11 & 9 \\ 4 & 2 & 3 \\ 8 & 13 & 12 \end{vmatrix} = 0 : \text{rg } A' < 4$$

rg A = rg A’ = 3 < n = 4. Sistema compatible indeterminado.

Sistema equivalente(S’): formado por la ecuaciones que contienen a los coeficientes del menor de orden tres distinto de cero, en este caso la 1ª, 2ª y 3ª.

$$\begin{cases} x+2y+3z+t=6 \\ -x-3y+z-2t=-1 \\ 3x-y+z=2 \end{cases}$$

sistema de tres ecuaciones y cuatro incógnitas, para resolverlo se transforma una variable(cualquiera) en parámetro($t=\lambda$).

$$\begin{cases} x+2y+3z=6-\lambda \\ -x-3y+z=-1+2\lambda \\ 3x-y+z=2 \end{cases} : \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 36$$

resolviendo por el método de Cramer en función de λ:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 3 \\ -1+2\lambda & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{36} = \frac{15-8\lambda}{36} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6-\lambda & 3 \\ -1 & -1+2\lambda & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{36} = \frac{24-20\lambda}{36} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6-\lambda \\ -1 & -3 & -1+2\lambda \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{36} = \frac{51+4\lambda}{36}$$

$$\text{Solución:} \left(\frac{15-8\lambda}{36}, \frac{24-20\lambda}{36}, \frac{51+4\lambda}{36}, \lambda\right) \ \forall \lambda \in R$$

13. Resolver: $\begin{cases} x-y+2z-t=0 \\ 2x-y+z=5 \\ y-2z+3t=3 \\ 2x-3y+6z-5t=-3 \end{cases}$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \quad A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \quad A\subset A' \Rightarrow \text{rg } A \le \text{rg } A' \le n=4$$

Rango de A: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 & -5 \end{vmatrix}=0:\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=1\ne 0:\text{rg } A=3$

Rango de A': De los menores orlados al menor de orden tres que define el rango de A, el único que queda por estudiar es: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 & -3 \end{vmatrix}=0:\text{rg } A'=3$

rg A = rg A' = 3 < n = 4. Sistema compatible indeterminado.

Sistema equivalente: $\begin{cases} x-y+2z-t=0 \\ 2x-y+z=5 \\ y-2z+3t=3 \end{cases}$. Para resolver el sistema se transforma la t en un parámetro y se resuelve en función de el mediante el método de Cramer.

$$t=\lambda:\begin{cases} x-y+2z=\lambda \\ 2x-y+z=5 \\ y-2z=3-3\lambda \end{cases}:\xrightarrow{\text{CRAMER}}\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-1-5\lambda \\ z=-2-\lambda \end{cases} \text{Solución}:(3-2\lambda,-1-5\lambda,-2-\lambda,\lambda)\ \forall\lambda\in R$$

14. Resolver: $\begin{cases} x-y-z+t=1 \\ 2x+y-z-2t=0 \\ 3x-y-2z+t=-1 \end{cases}$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rg } A\le \text{rg } A' \le 3 < n=4$$

Rango de A: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\ne 0:\text{rg}\ge 2.\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}=1\ne 0:\text{rg } A=3.$

Rango de A': Por dimensiones rg A' = 3.
Rg A = rg A' = 3 < n = 4. Sistema compatible indeterminado.

Para resolver el sistema, se transforma una variable en parámetro y se resuelve en función de él.

$$\begin{cases} x-y-z=1-\lambda \\ 2x+y-z=2\lambda \\ 3x-y-2z=-1-\lambda \end{cases} \qquad |A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}=1$$

Resolviendo por Cramer

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 2\lambda & 1 & -1 \\ -1-\lambda & -1 & -2 \end{vmatrix}}{1} = -5-\lambda \\ y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & 2\lambda & -1 \\ 3 & -1-\lambda & -2 \end{vmatrix}}{1} = 2+2\lambda \\ z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-\lambda \\ 2 & 1 & 2\lambda \\ 3 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}}{1} = -8-2\lambda \end{array}\right\} : \text{Solución } (-5-\lambda, 2+2\lambda, -8-2\lambda, \lambda)\ \forall\, \lambda \in R$$

15. Resolver: $\begin{cases} x-y-z+t=2 \\ 2x+y-t=1 \\ x+5y+3z-5t=-4 \end{cases}$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & -5 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{rg } A \le \text{rg } A' \le 3 < n = 4$$

Rango de A: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \ne 0 : \text{rg } A \ge 2.$ Orlando este menor se obtienen:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ y } \ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 0 : \text{rg } A = 2$$

Rango de A’: En la matriz ampliada tomando como referencia el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, solo queda por estudiar el menor orlado $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0 : \text{rg } A' = 2$

rg A = rg A’ = 2 < n = 4. Sistema compatible indeterminado con dos grados de indeterminación

Sistema equivalente:

$$\begin{cases} x-y-z+t=2 \\ 2x+y-t=1 \end{cases}$$

para resolverlo se convierten dos variables en parámetro(λ, μ), y se resuelve en función de ellos.

$$z=\lambda,\ t=\mu : \begin{cases} x-y=2+\lambda-\mu \\ 2x+y=1+\mu \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2+\lambda-\mu & -1 \\ 1+\mu & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3+\lambda}{3} = 1+\frac{\lambda}{3} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+\lambda-\mu \\ 2 & 1+\mu \end{vmatrix}}{3} = \frac{-3-2\lambda-3\mu}{3} = -1-\frac{2}{3}\lambda-\mu$$

$$\text{Solución} : \left(1+\frac{\lambda}{3}, -1-\frac{2}{3}\lambda-\mu, \lambda, \mu\right) \forall\, \lambda, \mu \in R$$