SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ecuaciones lineales.

Se llama ecuación lineal con n incógnitas x_1, x_2, x_3, x_n a toda ecuación que pueda escribirse de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde x_1, x_2, x_3, x_n son variables y a_1, a_2, a_3, ..., a_n, b son números reales, siendo a_i el coeficiente de la variable x_i y b el término independiente de la ecuación.

Si el término independiente de la ecuación es nulo (b = 0), se dice que la ecuación lineal es homogénea.

Se dice que un conjunto de números (k_1, k_2, k_3..., k_n) es solución de la ecuación anterior si sustituidas las variables x_1, x_2, x_3..., x_n por los valores k_1, k_2, k_3..., k_n se verifica la ecuación.

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n = b$$

Se define conjunto solución de una ecuación lineal al conjunto formado por todas sus soluciones.

Se dice que dos ecuaciones son equivalentes si las dos tienen el mismo conjunto solución.
Transformaciones equivalentes:

- Multiplicar o dividir a los dos términos de la ecuación por un mismo número.
- Intercambiar la posición de las variables.

Sistema de ecuaciones lineales.

Un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas cada ecuación se define como un sistema de m ecuaciones con n incógnitas ($S_{m\times n}$)

$$S_{m\times n}\begin{cases} a_{1.1}x_1 + a_{1.2}x_2 + \ldots + a_{1.n}x_n = b_1 \\ a_{2.1}x_1 + a_{2.2}x_2 + \ldots + a_{2.n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m.1}x_1 + a_{m.2}x_2 + \ldots + a_{m.n}x_n = b_m \end{cases}$$

Al igual que en el caso de las ecuaciones lineales una solución será un conjunto de números reales desde k_1 hasta k_n que verifique simultáneamente las m ecuaciones del sistema. Al conjunto formado por todas las soluciones del sistema se le denomina conjunto solución.

Para dos variables se suele utilizar x, y, para tres x, y, z, para cuatro x, y, z, t, para un número de variables superior a cuatro se suelen emplear variables alfa-numéricas x_1, x_2,..., x_n.

Dos sistemas se definen como equivalentes si ambos tienen el mismo conjunto solución.
Transformaciones equivalentes:

- Multiplicar o dividir todos los términos de la ecuación por un mismo número.
- Intercambiar la posición de las variables.
- Intercambiar la posición de las ecuaciones
- Si dos ecuaciones son iguales ó proporcionales, eliminar una de ellas.
- Si una ecuación es combinación lineal del resto de las ecuaciones, eliminarla.
- Sustituir una ecuación por una combinación lineal de ella misma con el resto de las ecuaciones.

Todo sistema de ecuaciones independientemente del número de ecuaciones e incógnitas que tenga, o tiene una solución, infinitas soluciones o ninguna solución, por tanto, según el conjunto solución los sistemas se pueden clasificar en los siguientes tipos:

$$\text{Sistemas}:\begin{cases} \text{Compatibles (tienen solución)}:\begin{cases} \text{Determinados (solución única). S.C.D.} \\ \text{Indeterminados (infinitas soluciones). S.C.I.} \end{cases} \\ \text{Incompatibles (no tienen solución). S.I.} \end{cases}$$

Sistemas homogéneos.

Si en un sistema m×n todos los términos independientes son nulos se le define como sistema homogéneo.

$$\left.\begin{array}{c} a_{1.1}x_1 + a_{1.2}x_2 + \ldots + a_{1.n}x_n = 0 \\ a_{2.1}x_1 + a_{2.2}x_2 + \ldots + a_{2.n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m.1}x_1 + a_{m.2}x_2 + \ldots + a_{m.n}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

Los sistemas homogéneos se caracterizan porque siempre admiten al menos la solución trivial:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

por lo que siempre son sistemas compatibles.

Ecuación degenerada.

Se dice que una ecuación lineal es degenerada si es de la forma:

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = b$$

dado que el primer término de la ecuación es nulo, estas ecuaciones degeneradas solo pueden ser de dos tipos:

- Trivial: si b = 0, en este caso cualquier colección de números reales satisface la ecuación. Por eso las soluciones de un sistema que contengan una ecuación trivial serán las soluciones del resto de las ecuaciones, siendo posible suprimir las ecuaciones triviales sin que varíe el conjunto solución.
- Absurdo: si b ≠ 0, no tiene solución. Todo sistema que contenga una solución absurda es incompatible.

Matrices asociadas a un sistema.

Cuando se manejan sistemas con muchas ecuaciones y/o incógnitas, es más sencillo asociar el sistema a una ecuación matricial sencilla.

Un sistema m×n de la forma:

$$S_{m\times n}: \left\{\begin{array}{c} a_{1.1}x_1 + a_{1.2}x_2 + \ldots + a_{1.n}x_n = b_1 \\ a_{2.1}x_1 + a_{2.2}x_2 + \ldots + a_{2.n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m.1}x_1 + a_{m.2}x_2 + \ldots + a_{m.n}x_n = b_m \end{array}\right.$$

se puede asociar a una ecuación matricial de la forma

$$A\cdot X = C$$

Siendo:

- $A_{m\times n}$. Matriz de coeficientes. $A = \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2.} & \cdots & a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m.1} & a_{m.2} & \cdots & a_{m.n} \end{pmatrix}$
- $X_{n\times 1}$. Matriz incógnita. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- $B_{m\times 1}$. Matriz de términos independientes. $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

quedando la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2.} & \cdots & a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m.1} & a_{m.2} & \cdots & a_{m.n} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A la unión de las matrices de coeficientes con la matriz de términos independientes se define como matriz ampliada del sistema

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots & a_{2.n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m.1} & a_{m.2} & \cdots & a_{m.n} & b_m \end{pmatrix}$$

A cada sistema se le asocian las matrices A y A*. Un sistema queda completamente descrito por su matriz ampliada A*, que puede verse como una forma compacta de escribir el sistema suprimiendo los nombres de las incógnitas. Cada fila de A* corresponde a una ecuación del sistema y cada columna a los coeficientes de una incógnita, salvo la última que corresponde a los términos independientes del sistema. Para recordar esto, la columna de términos independientes suele escribirse separada del resto por una barra vertical.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots & a_{2.n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m.1} & a_{m.2} & \cdots & a_{m.n} & b_m \end{array}\right)$$

Como cada fila de la matriz ampliada representa una ecuación del sistema, entre las filas de la A* se podrán hacer las mismas operaciones que entre las ecuaciones de un sistema. Las operaciones elementales entre filas que pueden efectuarse sobre cualquier matriz son:

- Multiplicar o dividir todos los términos de la ecuación por un mismo número.
- Intercambiar la posición de las variables.
- Intercambiar la posición de las ecuaciones
- Si dos ecuaciones son iguales ó proporcionales, eliminar una de ellas.
- Si una ecuación es combinación lineal del resto de las ecuaciones, eliminarla.
- Sumar ó restar a una fila otra multiplicada por un número.

Cuando una matriz se obtienen de otra mediante sucesivas operaciones elementales entre filas, se dice que ambas matrices son equivalentes por filas. Es evidente que dos matrices ampliadas equivalentes por filas describen sistemas equivalentes.

Método de eliminación de Gauss.

El método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales es una reducción escalonada para obtener un sistema equivalente más sencillo, cuya forma permite averiguar si se trata de un sistema compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible y, en los casos de compatibilidad, resolverlo.

Podemos distinguir tres etapas en el método de Gauss:

- Etapa 1. Reducción del sistema, o de su matriz ampliada, a forma escalonada.
- Etapa 2. Clasificación del sistema escalonado obtenido en la etapa 1.
- Etapa 3. Resolución del sistema escalonado cuando sea compatible.

Etapa 1.

Se dice que una matriz es escalonada si se cumplen las siguientes condiciones:

- Todas las filas de ceros, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.
- El primer elemento no nulo (de izquierda a derecha) de cada fila está situado más a la derecha que el primer elemento no nulo de la fila inmediata superior.

Toda matriz es equivalente por filas a alguna matriz escalonada. Es decir, mediante operaciones elementales entre filas, toda matriz puede llevarse a forma escalonada.

Se dice que un sistema es escalonado si su matriz ampliada es escalonada. Así pues, en un sistema escalonado:

- La primera incógnita de cada ecuación está situada más a la derecha que la primera incógnita de la ecuación precedente.
- De todas las ecuaciones, solo la ultima puede ser absurda.

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} & \vdots & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots & a_{2.n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m.1} & a_{m.2} & \cdots & a_{m.n} & \vdots & b_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{OPERACIONES}\\ \text{EQUIVALENTES}}} \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} & \vdots & b_1 \\ 0 & a_{2.2} & \cdots & a_{2.n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m.n} & \vdots & b_m \end{pmatrix}$$

Etapas 2 y 3.

Consideremos un sistema escalonado con n incógnitas. Sean r y r’ el número total de ecuaciones y el número de ecuaciones no absurdas, respectivamente. Entonces:

- Si $r \neq r'$ el sistema es incompatible.
- Si $r = r'$ el sistema es compatible: $\begin{cases} \text{Determinado si } r = n \\ \text{Indeterminado si } r < n \end{cases}$

Los sistemas escalonados sin ecuaciones absurdas y con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas se denominan sistemas triangulares.

Para un sistema de 3×3:

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & \vdots & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & \vdots & b_2 \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & \vdots & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{OPERACIONES}\\ \text{EQUIVALENTES}}} \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & \vdots & b_1 \\ 0 & a'_{2.2} & a'_{2.3} & \vdots & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{3.3} & \vdots & b'_3 \end{pmatrix}$$

Su solución se puede hallar por el método de sustitución hacia arriba.

- Primero se resuelve la última ecuación para la última incógnita: x_3.
- A continuación, se sustituye el valor hallado de x_3 en la penúltima ecuación y se resuelve para la penúltima incógnita: x_2.
- Después, se sustituyen los valores hallados de x_3 y x_2 en la antepenúltima ecuación y se resuelve para la primera incógnita: x_1.

Sí el sistema tuviera más incógnitas, se resolvería de forma análoga.

Un sistema escalonado compatible indeterminado de 3×3 puede tener una de estas formas:

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & \vdots & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & \vdots & b_2 \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & \vdots & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{OPERACIONES}\\ \text{EQUIVALENTES}}} \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & \vdots & b_1 \\ 0 & a'_{2.2} & a'_{2.3} & \vdots & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & \vdots & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & \vdots & b_2 \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & \vdots & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{OPERACIONES}\\ \text{EQUIVALENTES}}} \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & \vdots & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

compatible indeterminado con un grado de indeterminación ó compatible indeterminado con dos grados de indeterminación respectivamente. Se define como grado de indeterminación de un sistema compatible indeterminado a la diferencia entre el número de incógnitas y el número de ecuaciones linealmente independientes. El grado de indeterminación indica el número de parámetros que se necesitan para resolver el sistema.

El sistema se resuelve en función de los parámetros de abajo arriba.

Un sistema será incompatible cuando al triangularizarlo, aparezca una ecuación absurda

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & \vdots & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & \vdots & b_2 \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & \vdots & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{OPERACIONES}\\ \text{EQUIVALENTES}}} \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & \vdots & b_1 \\ 0 & a_{2.2} & a_{2.3} & \vdots & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_3 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan.

Este método es una variante del anterior, en la que la matriz ampliada del sistema se lleva mediante operaciones elementales a forma canónica por filas.

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & \vdots & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & \vdots & b_2 \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & \vdots & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{EQUIVALENTES}]{\text{OPERACIONES}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & b'_3 \end{pmatrix}$$

Se dice que una matriz tiene forma canónica por filas si es escalonada y se cumplen, además, las condiciones:

- El elemento no nulo situado más a la izquierda en cada fila es igual a 1.
- El 1 situado más a la izquierda en cada fila es el único elemento distinto de cero de su columna.

Cada matriz A es equivalente por filas a una única matriz en forma canónica por filas (llamada la forma canónica por filas de A).

Una vez reducida la matriz ampliada mediante operaciones equivalentes a su forma canónica por filas, se escribe el sistema escalonado asociado y se analiza igual que en la etapa 2 del método de Gauss.

En los sistemas escalonados que se obtienen en el método de Gauss-Jordan, cada incógnita no libre aparece exactamente en una ecuación, y su coeficiente es 1. Por eso, no es necesario efectuar la sustitución hacia arriba para resolver los sistemas compatibles.

- En el caso compatible determinado, el nuevo sistema expresa directamente la solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & b'_3 \end{pmatrix}$$

- En el caso compatible indeterminado, basta pasar los términos con incógnitas libres a los segundos miembros de las ecuaciones y asignar parámetros a dichas incógnitas. El sistema así obtenido expresa directamente los valores de las incógnitas no libres en función de los parámetros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a'_{1.3} & \vdots & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{2.3} & \vdots & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & b'_3 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Cramer. Regla de Cramer.

Se llama sistema de Cramer a todo sistema de ecuaciones lineales que verifique las dos condiciones siguientes:

- El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.
- El determinante de la matiz de coeficientes es distinto de cero.

Regla de Cramer:

Cualquier sistema de Cramer $n \times n$ es compatible determinado y su solución única viene dada por:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

donde A_i es la matriz que se obtiene sustituyendo la columna i-ésima en la matriz de coeficientes A por el vector de términos independientes.

Demostración: consideremos un sistema de Cramer $n \times n$:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{1.1}x_1 & + & a_{1.2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1.n}x_n & = & b_1 \\ a_{2.1}x_2 & + & a_{2.2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2.n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n.1}x_1 & + & a_{n.2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n.n}x_n & = & b_n \end{array}\right\} , \ |A| \neq 0$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes cumple $|A| \neq 0$, dicha matriz es invertible, el sistema es entonces compatible determinado, y su solución viene dada por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots & a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n.1} & a_{n.2} & \cdots & a_{n.n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si ahora sustituimos A^{-1} por la expresión hallada en la sección anterior y multiplicamos por el vector de términos independientes, llegamos a:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{1.1} & A_{1.2} & \cdots & A_{n.1} \\ A_{1.2} & A_{2.2} & \cdots & A_{n.2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1.n} & A_{2.n} & \cdots & A_{n.n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_1A_{1.1} & + & b_2A_{2.1} & + & \cdots & + & b_nA_{n.1} \\ b_1A_{1.2} & + & b_2A_{2.2} & + & \cdots & + & b_nA_{n.2} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_1A_{1.n} & + & b_2A_{2.n} & + & \cdots & + & b_nA_{n.n} \end{pmatrix}$$

o sea,

$$x_1 = \frac{b_1A_{1.1} + b_2A_{2.1} + \cdots + b_nA_{n.1}}{|A|}, \qquad x_2 = \frac{b_1A_{1.1} + b_2A_{2.2} + \cdots + b_nA_{n.2}}{|A|}$$

$$x_i = \frac{b_1A_{1.i} + b_2A_{2.i} + \cdots + b_nA_{n.i}}{|A|}, \qquad x_n = \frac{b_1A_{1.n} + b_2A_{2.n} + \cdots + b_nA_{n.n}}{|A|}$$

Observamos que el numerador en la expresión de cada x_i es igual al desarrollo por la columna i-esima del determinante de la matriz.

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1.1} & \cdots & a_{1.i-1} & b_1 & a_{1.i+1} & \cdots & a_{1.n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n.1} & \cdots & a_{n.i-1} & b_n & a_{n.i+1} & \cdots & a_{n.n} \end{pmatrix}$$

que resulta de sustituir en A la columna i-ésima por el vector de términos independientes. Por tanto, la solución puede expresarse como:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} \\ b_2 & a_{2.2} & \cdots & a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n.2} & \cdots & a_{n.n} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1.1} & b_1 & \cdots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & b_2 & \cdots & a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n.1} & b_n & \cdots & a_{n.n} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n.1} & a_{n.2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|},$$

como queríamos demostrar.

Para un sistema 3×3:

$$\begin{cases} a_{1.1}x + a_{1.2}y + a_{1.3}z = b_1 \\ a_{2.1}x + a_{2.2}y + a_{2.3}z = b_2 \\ a_{3.1}x + a_{3.2}y + a_{3.3}z = b_3 \end{cases} \text{ siendo } |A| = \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1.2} & a_{1.3} \\ b_2 & a_{2.2} & a_{2.3} \\ b_3 & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1.1} & b_1 & a_{1.3} \\ a_{2.1} & b_2 & a_{2.3} \\ a_{3.1} & b_3 & a_{3.3} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & b_2 \\ a_{3.1} & a_{3.2} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|},$$

Los sistemas compatibles determinados, también se pueden resolver mediante una ecuación matricial. Sea el sistema n×n compatible determinado $\left(|A| \neq 0\right)$:

$$S_{n\times n}:\begin{cases} a_{1.1}x_1 + a_{1.2}x_2 + \ldots + a_{1.n}x_n = b_1 \\ a_{2.1}x_1 + a_{2.2}x_2 + \ldots + a_{2.n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n.1}x_1 + a_{n.2}x_2 + \ldots + a_{n.n}x_n = b_n \end{cases}$$

que matricialmente se puede representar como:

$$A\cdot X = C$$

Despejando la matriz X mediante la inversa de A:

$$X = A^{-1}\cdot B$$

sustituyendo cada matriz por su expresión:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2.} & \cdots & a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n.1} & a_{n.2} & \cdots & a_{n.n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

operando e identificando se obtiene el conjunto solución.

Clasificación de sistema. Teorema de Rouché-Frobenius.

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas es compatible si y sólo si el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada son iguales:
rg A = rg A*

Suponiendo que rg A = rg A* = r, se pueden presentar dos casos:

- Sí r = n, sistema compatible determinado
- Sí r ≠ n, sistema compatible indeterminado. A la diferencia n − r se la denomina Grado ó grados de indeterminación del sistema, e indica el número de parámetros necesarios para resolver el sistema.

$$\text{Sistemas}:\begin{cases} \text{Compatibles}\ (\text{rg A} = \text{rg A}^*): \begin{cases} \text{Determinados}\ (\text{rg A} = \text{rg A}^* = n).\ \text{S.C.D.} \\ \text{Indeterminados}\ (\text{rg A} = \text{rg A}^* < n).\ \text{S.C.I.} \end{cases} \\ \text{Incompatibles}\ (\text{rg A} \neq \text{rg A}^*).\ \text{S.I.} \end{cases}$$

El rango de un sistema informa del número de ecuaciones linealmente independientes. Las ecuaciones linealmente independientes de un sistema, son las únicas necesarias para resolver el sistema. Se seleccionan a partir del mayor menor distinto de cero que define el rango del sistema, siendo las ecuaciones que contienen los elementos de dicho menor.

Interpretación geométrica de sistemas.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} a_{1.1}x + a_{1.2}y = b_1 \\ a_{2.1}x + a_{2.2}y = b_2 \end{cases}$$

definido por la matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} \\ a_{2.1} & a_{2.2} \end{pmatrix}\ \text{y}\ \ A^* = \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & b_2 \end{pmatrix}$$

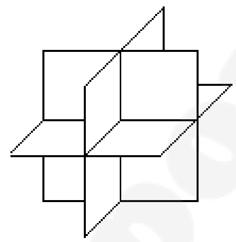
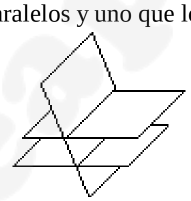
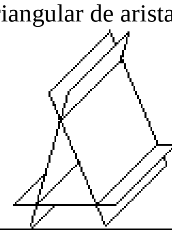
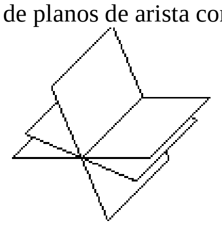
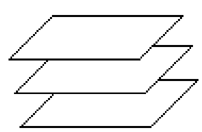
rg A	rg A^*	Tipo de Sistema	Interpretación
2	2	S.C.D.	Rectas secantes
1	2	S.C.I.	Rectas paralelas
1	1	S.C.I.	Rectas coincidentes

Para un sistema 3×3:

$$\begin{cases} a_{1.1}x + a_{1.2}y + a_{1.3}z = b_1 \\ a_{2.1}x + a_{2.2}y + a_{2.3}z = b_2 \\ a_{3.1}x + a_{3.2}y + a_{3.3}z = b_3 \end{cases}$$

definido por las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & b_2 \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & b_3 \end{pmatrix}$$

rg A	**rg A^***	**Tipo de sistema**	**Interpretación**
3	3	S.C.D.	Tres planos concurrente en un punto 
2	3	S.I.	Dos paralelos y uno que los corta  ó Prisma triangular de aristas paralelas 
2	2	S.C.I.	Haz de planos de arista común 
1	2	S.I.	Planos paralelos 
1	1	S.C.I.	Planos coincidentes