Tema 5. Semejanza

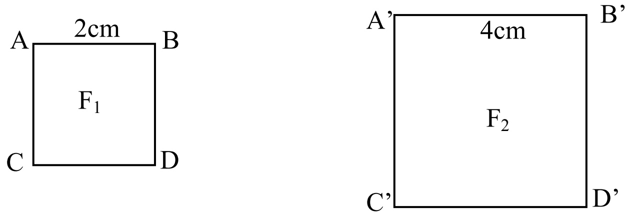
1. Definición de Semejanza. Escalas

Definición: dos figuras se dicen que son semejantes si tienen misma forma de tal manera que se cumple:

1. Los ángulos correspondientes son todos iguales
2. Los lados son todos proporcionales entre si. La razón de proporcionalidad (cociente entre lados correspondientes) se llama razón de semejanza

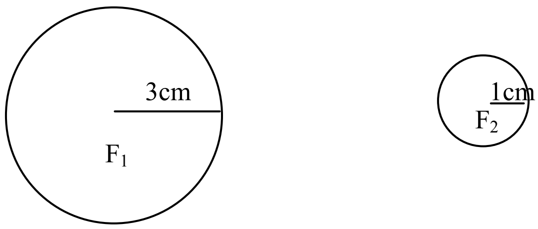
Ejemplo:

1) todos los cuadrados son semejantes (ángulos iguales y lados proporcionales)



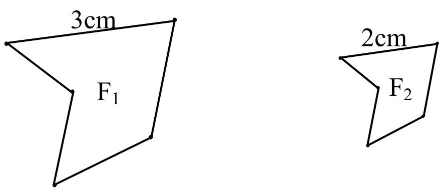
Luego la figura F_1 es semejante a F_2 ($F_1 \equiv F_2$) con razón de semejanza de k=$\frac{4cm}{2cm} = 2$

2) Todos los circunferencias son semejantes



Luego la figura F_1 es semejante a F_2 ($F_1 \equiv F_2$) con razón de semejanza de k=$\frac{1cm}{3cm} = \frac{1}{3}$

3) Veamos un ejemplo de dos figuras arbitrarias semejantes:



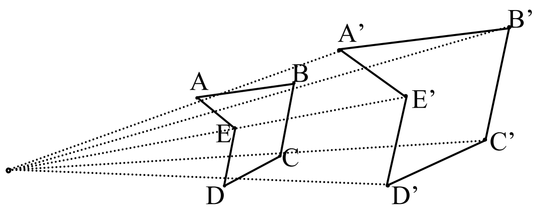
La figura F_1 es semejante a F_2 ($F_1 \equiv F_2$) con razón de semejanza k=$\frac{2cm}{3cm} = \frac{2}{3}$

En la vida corriente las figuras semejantes que se utilizan son por ejemplo los planos (en 2 dimensiones) o las maquetas (en 3 dimensiones).

Definición de escala: el concepto de escala es equivalente al de razón de semejanza, es la razón métrica entre un plano o maqueta y aquello a lo que representa.

La notación usual en los mapas es la siguiente 1:1000 que significa que 1cm en el mapa es en realidad 1000cm=10m. Es equivalente a una razón de semejanza k=1000.

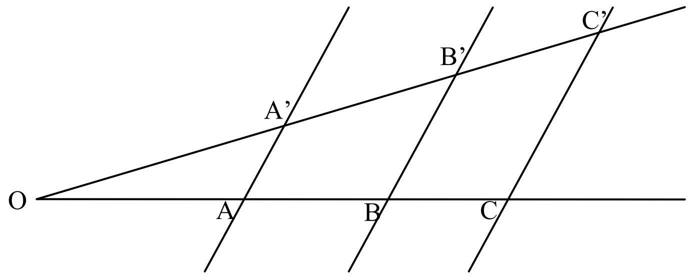
Formas de construir figuras semejantes: hay varias formas veamos a partir de un punto fijo (foco):



2. Teorema de Tales.

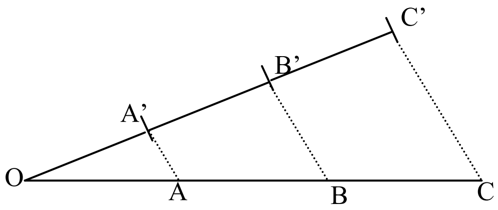
En el apartado anterior hemos definido cuando dos figuras son semejantes, cuando los ángulos son iguales dos a dos y lados proporcionales, pero en la práctica es difícil ver cuando dos figuras son semejantes. Para esto se utilizará el teorema de Tales.

Teorema de Tales: sean dos semirrectas (r y s) con origen común (punto O), todas las rectas paralelas entre si secantes a r y s formando segmentos proporcionales.



$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Aplicación: dividir un segmento en partes iguales (utilizado para representar fracciones):

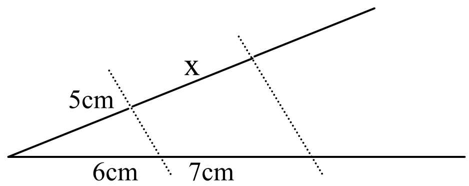


Por construcción → 3OA'=OC' y 2OA'=OB'. Aplicando Tales:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}}\rightarrow\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OC'}}{\overline{OA'}}=3$$

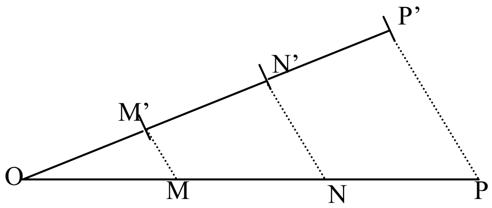
$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}}\rightarrow\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}}=\frac{2}{3}$$

Ejercicio 1. **Calcula el valor de x:**



$$\frac{6cm}{5cm}=\frac{7cm}{x}$$ → x=35/6≈5,8cm

Ejercicio 2. **Calcular NP y OP' en la siguiente figura:**



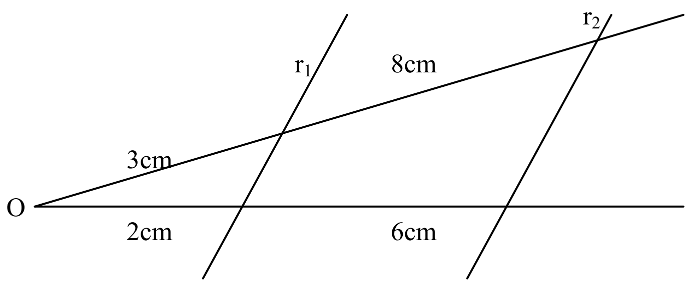
MN=2m; N'P'=3m;

M'N'=3m; OP=5m

$$\frac{\overline{NP}}{\overline{N'P'}}=\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}}\to\frac{\overline{NP}}{3\cdot m}=\frac{2\cdot m}{3\cdot m}\to\overline{NP}=2m$$

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OP'}}=\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}}\to\frac{5\cdot m}{\overline{OP'}}=\frac{2}{3}\to\overline{OP'}=7{,}5m$$

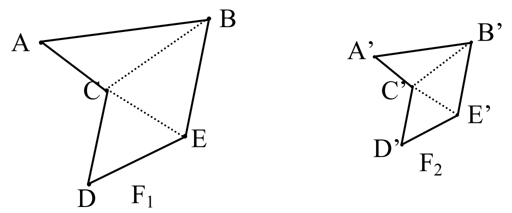
Ejercicio 3.Decir si son paralelas r_1 y r_2



Si son paralelas se cumplirá Tales y por tanto $\frac{3}{2}=\frac{8}{6}$ que no es cierto ya que 18≠16. Luego no son paralelas

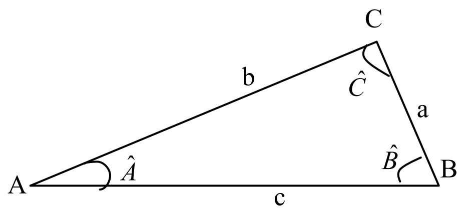
3. Semejanza de triángulos. Criterios de semejanza

El estudio de la semejanza de triángulos es muy importante, ya que todo polígono se puede descomponer en triángulos. De esta forma dos polígonos son semejantes al descomponer los dos en triángulo los triángulos son semejantes dos a dos con misma razón de semejanza.



Si se cumple que $\overset{\triangle}{ABC} \equiv \overset{\triangle}{A'B'C'}$, $\overset{\triangle}{CDE} \equiv \overset{\triangle}{C'D'E'}$ y $\overset{\triangle}{CBE} \equiv \overset{\triangle}{C'B'E'}$ con misma razón de semejanza k, entonces $F_1 \equiv F_2$ con razón K

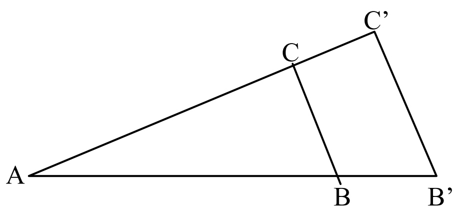
Notación triángulos: los vértices letras mayúsculas y lados letras minúsculas, la misma que el vértice opuesto. El ángulo del vértice B se escribe como $\hat{B}$. Veamos el dibujo



3.1 Triángulos en posición de Tales

Se dice que dos triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{AB'C'}$ en posición de Tales si el vértice A y el ángulo $\hat{A}$ son los mismos y los lados BC y B'C' son paralelos.

Ejemplo:



Teorema: los triángulos en posición de Tales son semejantes. *Demostración*: para que sea semejante ha de cumplirse:

a) los tres ángulos iguales: que se cumple al ser uno de ellos común y los otros dos ángulos son iguales al ser paralelos sus lados

b) lados proporcionales: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ al cumplirse el teorema de Tales

3.2 Criterios generales de triángulos

Gracias al teorema de Tales para comprobar si dos triángulos son semejantes no es necesario ver si todos los ángulos son iguales y todos los lados proporcionales. En la práctica tenemos 3 criterios:

Primer Criterio: dos triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ son semejantes si dos ángulos iguales (por ejemplo $\hat{A}=\hat{A}'$ y $\hat{B}=\hat{B}'$)

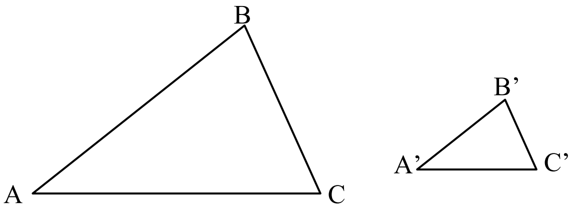
Segundo Criterio: dos triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ son semejantes si sus tres lados son proporcionales ($\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k$).

Tercer Criterio: dos triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ son semejantes si un ángulo igual y los dos lados que lo forman son proporcionales (por ejemplo $\hat{A}=\hat{A}'$ $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k$)

Todas las demostraciones se hacen a partir del teorema de Tales

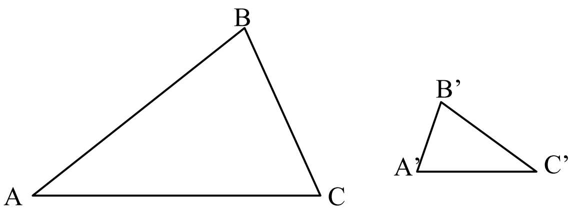
***Ejercicio4*: decir si son semejantes los siguientes triángulos.**

a) b=7cm, c=6cm; b'=2,5cm, c'=2cm $\hat{A}=\hat{A}'=30^{o}$



Veamos si se cumple el criterio 3: $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\rightarrow\frac{7}{2{,}5}=\frac{6}{2}\rightarrow 14\neq 15$ no semejantes

b) $\hat{A}=30^{o}, \hat{B}=70^{o}$, $\hat{A}'=80^{o}, \hat{B}'=70^{o}$



A simple vista parece que no son semejantes, pero engaña. Lo que ocurre es que los 2 triángulos son semejantes pero están girados. Tal que el vértice equivalente de A es C', el de C es A'. Vemos como son iguales los tres ángulos:

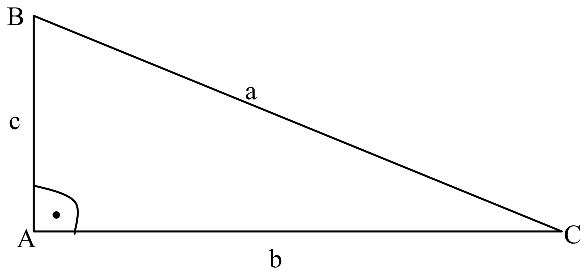
$$\hat{A}=30^{o}, \hat{B}=70^{o}, \hat{C}=180-(70+30)=80^{o} \rightarrow 30^{o}, 70^{o}, 80^{o}$$

$$\hat{A}'=80^{o}, \hat{B}'=70^{o}, \hat{C}'=180-(70+80)=30^{o} \rightarrow 30^{o}, 70^{o}, 80^{o}$$

Luego son semejantes.

4. Criterios de semejanza en triángulo rectángulos

En los triángulos rectángulos podemos simplificar los tres criterios anteriores, ya que si dos triángulos son rectángulos ya podemos asegurar que tienen un ángulo igual (el ángulo recto). Antes veamos la notación utilizada en triángulos rectángulos:



a=hipotenusa

b,c=catetos

$\hat{A}=90º$

Primer Criterio: dos triángulos rectángulo $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AB'C'}$ son semejantes si uno de sus ángulos no rectos son iguales (por ejemplo $\hat{B}=\hat{B}'$)

Dem: se cumple que dos ángulos iguales en recto $\hat{A}=\hat{A}'$=90º y el que nos dicen en el criterio $\hat{B}=\hat{B}'$ luego por el primer criterio de los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AB'C'}$ son semejantes.

Segundo Criterio: dos triángulos rectángulo $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AB'C'}$ son semejantes si uno de los catetos y la hipotenusa son proporcionales $\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}=k$

Dem: $\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}=k \rightarrow \begin{cases} a=ka' \\ b=kb' \end{cases}$. Veamos como el otro cateto es también proporcional aplicando el teorema de Pitágoras y por tanto por el criterio 2 de triángulos será semejante:

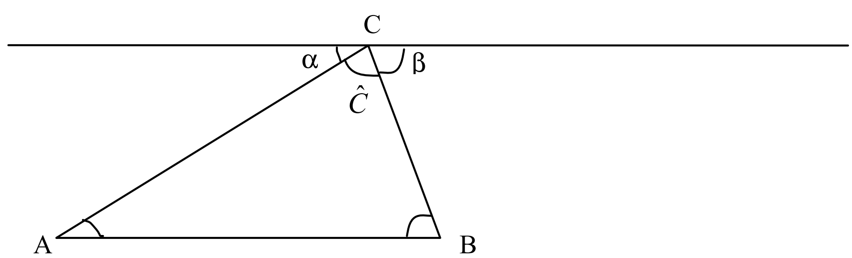
$$c^2=a^2-b^2=(ka')^2-(kb')^2=k^2(a'^2-b'^2)=k^2c'^2$$

$$c^2=k^2c'^2 \rightarrow c=kc' \rightarrow \frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}=k$$

5. Teoremas en triángulos rectángulos

Teorema de los ángulos: la suma de los ángulos de todo triángulo es igual a un ángulo llano, es decir 180º

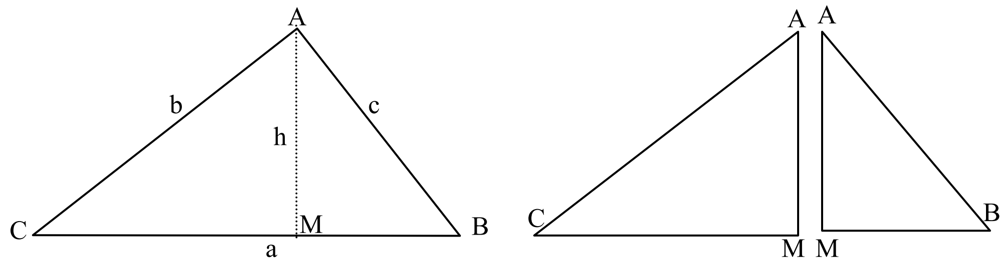
Dem: dibujamos una recta paralela a un lado por el vértice opuesto



Se cumple que $\hat{A}=\alpha$ y $\hat{B}=\beta$ ya que formados por rectas paralelas. De esta forma como α+β+$\hat{C}$=180º → $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$=180º

Teorema 2: en todo triángulo rectángulo la altura trazada sobre la hipotenusa determina dos triángulos rectángulos semejantes al original

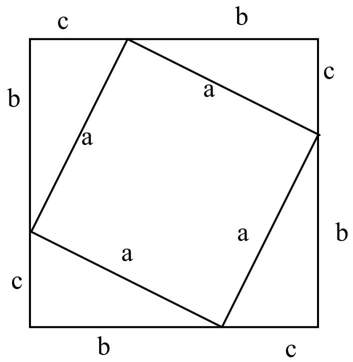
Dem: Dibujemos el triángulo rectángulo y los dos que se forman al trazar la altura:



Tenemos que en el triángulo $\widehat{ACM}$ el ángulo del vértice C es el mismo que en el original ($\widehat{ABC}$); lo mismo ocurre con el triángulo $\widehat{ABM}$ donde el ángulo del vértice B es el mismo que en el original. Por el criterio1 de triángulos rectángulos tenemos que los tres triángulos son semejantes.

Teorema de Pitágoras: en todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Con la notación fijada al principio del apartado → $\mathbf{a^2=b^2+c^2}$

Dem: existe más de 100 demostraciones diferentes, veamos una de ellas. Para eso construimos un cuadrado repitiendo 4 veces el triángulo rectángulo:



Vemos que se generan dos cuadrados, el grande de lado b+c y el pequeño de lado a. El área del cuadrado grande será igual a la suma del área del pequeño más la de los 4 triángulos (iguales):

$\text{área}_{\text{cuadrado grande}}=(b+c)^2$

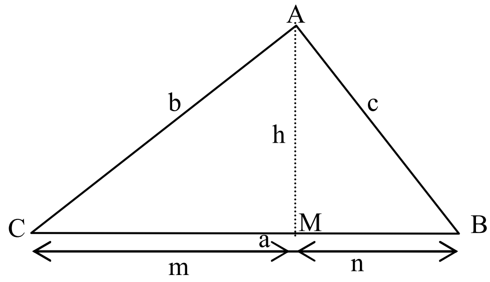
$\text{área}_{\text{cuadrado pequeño}}= a^2$

$\text{área}_{\text{triángulo}}=\frac{1}{2}bc$

Igualando las áreas: $\text{área}_{\text{cuadrado grande}}=\text{área}_{\text{cuadrado pequeño}}+4\cdot\text{área}_{\text{triángulo}}$ →

$(b+c)^2=a^2+4\cdot\frac{1}{2}bc$ → $b^2+c^2+2bc=a^2+2\cdot bc$, simplificando obtenemos el teorema de Pitágoras: $b^2+c^2=a^2$

Teorema del cateto: el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre la hipotenusa:



$c^2=a\cdot n$

$b^2=a\cdot m$

Demostración:

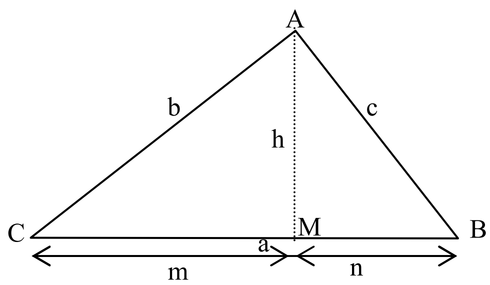
1) Al ser los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{MAC}$ semejantes (teorema 2) tenemos que sus lados son proporcionales. Los lados proporcionales de los dos triángulos son la hipotenusa de $\widehat{ABC}$ (a) y la hipotenusa de $\widehat{MAC}$ (b); por otro lado el cateto grande de $\widehat{ABC}$ (b) será proporcional al cateto grande de $\widehat{MAC}$ (m). De esta forma al ser semejantes los triángulos los lados son proporcionales:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{m} \rightarrow b^2=a\cdot m$$

2) Al ser los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{MAB}$ semejantes tenemos que sus lados son proporcionales. Los lados proporcionales de los dos triángulos son la hipotenusa de $\widehat{ABC}$ (a) y la hipotenusa de $\widehat{MAB}$ (c); por otro lado el cateto pequeño de $\widehat{ABC}$ (c) será proporcional al cateto pequeño de $\widehat{MAC}$ (n). De esta forma al ser semejantes los triángulos los lados son proporcionales:

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{n} \rightarrow c^2=a\cdot n$$

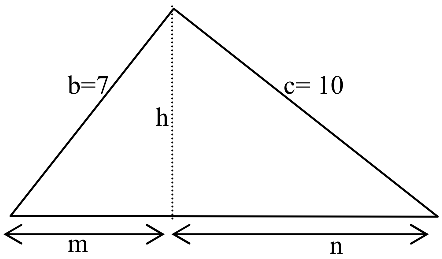
Teorema de la altura: el cuadrado de la altura de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual al producto de las dos partes en que dicha altura divide a la hipotenusa:



$h^2=m\cdot n$

Demostración: como $\widehat{ABC}$ es semejante a $\widehat{ACM}$ y a $\widehat{AMB}$ por tanto los triángulos $\widehat{ACM}$ y $\widehat{AMB}$ son semejantes y por tanto sus lados proporcionales: cateto grande de $\widehat{ACM}$ (m) es el equivalente al grande de $\widehat{AMB}$ (h) y el pequeño de $\widehat{ACM}$ (h) al pequeño de $\widehat{AMB}$(n) → $\frac{h}{n}=\frac{m}{h} \rightarrow h^2=m\cdot n$

Ejercicio 5. **Calcular h, m y n en el triángulo rectángulo:**



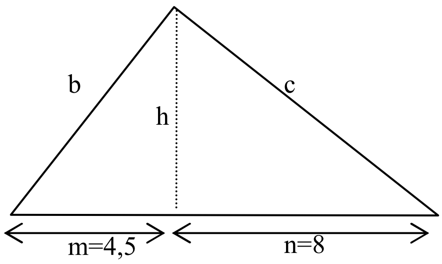
Aplicando el teorema de cateto y la altura y de Pitágoras:

Teorema de Pitágoras: $a^2=b^2+c^2 \rightarrow a=\sqrt{149}$

Teorema cateto: $b^2=a\cdot m \rightarrow m=\frac{49}{\sqrt{149}}=\frac{49\sqrt{149}}{149}$, $c^2=a\cdot n \rightarrow n=\frac{100}{\sqrt{149}}=\frac{100\sqrt{149}}{149}$

Teorema altura: $h^2=m\cdot n \rightarrow h^2=\frac{49\sqrt{149}}{149}\cdot\frac{100\sqrt{149}}{149}=\frac{4900}{149} \rightarrow h=\sqrt{\frac{4900}{149}}=\frac{70}{\sqrt{149}}=\frac{70\sqrt{149}}{149}$

Ejercicio 6. **En un triángulo rectángulo las proyecciones de los catetos miden 8cm y 4,5cm. Calcular las medidas de los catetos y de la hipotenusa y la altura:**



El valor de a=m+n=12,5cm

Teorema del cateto: $b^2=a\cdot m \rightarrow b=\sqrt{12{,}5\cdot 4{,}5}=7{,}5cm$

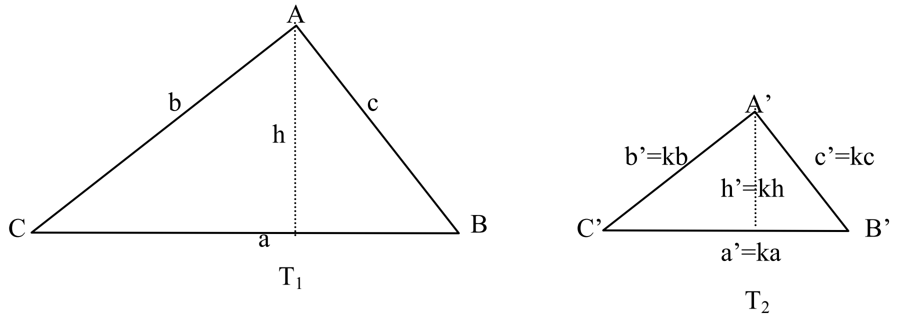
$c^2=a\cdot n \rightarrow c=\sqrt{12{,}5\cdot 8}=10cm$

Teorema de Pitágoras $b^2=m^2+h^2 \rightarrow h=\sqrt{7{,}5^2-4{,}5^2}=6cm$

6. Relación entre áreas de figuras semejantes

Teorema: Si dos triángulos T_1 y T_2 son semejantes con razón de semejanza k, el área de T_2 y T_1 se relacionan de la siguiente manera: **area(T_2)=k^2area(T_1).**

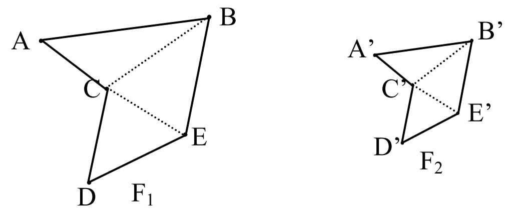
Dem: como son semejantes de razón k la relación entre los lados y los elementos de los dos triángulos es que los elementos de T_2 son k veces los de T_1



$$\text{área}(T_2)=\frac{a'\cdot h'}{2}=\frac{ka\cdot kh}{2}=k^2\frac{ah}{2}=k^2 area(T_1)$$

Corolario: sean F_1 y F_2 dos polígonos semejantes con razón de semejanza k, el área de F_2 y F_1 se relacionan de la siguiente manera: **area(F_2)=k^2area(F_1).**

Demostración: descomponemos F_1 y F_2 en triángulos que serán semejantes de razón k. Las áreas de los triángulos de F_2 serán k^2 veces los de F_1. Si sumamos todas las áreas obtendremos el área de F_2 que también será k^2 veces la de F_1



$a(F_1)=a(ABC)+a(BCE)+a(CDE)$

$a(F_2)=a(A'B'C')+a(B'C'E')+a(C'D'E')=k^2a(A'B'C')+k^2a(B'C'E')+k^2a(C'D'E')$
$= k^2\cdot(a(A'B'C')+a(B'C'E')+a(C'D'E'))=k^2\cdot a(F_1)$

Ejemplo: calcular el área de dos cuadrados, uno de lado 2cm y otro de lado 6cm:

Son figuras semejantes con k=3:

$area_1=(2cm)^2=4cm^2$ $area_2=(6cm)^2=36cm^2=3^2\cdot(4cm^2)$

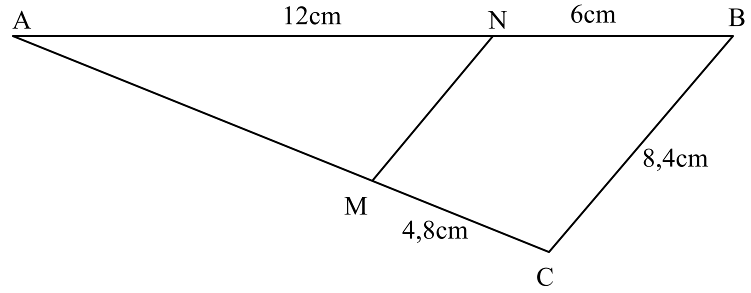
Ejercicios Finales

Ejercicio 7. **Dos triángulos ABC y A'B'C' son semejantes con razón de semejanza k=2/3, calcular los lados del triángulo A'B'C' si sabemos que AB=12m, BC=9m, AC=7,5m .**

Es sencillo si son semejantes los lados son proporcionales y si 2/3 es la conste de proporcionalidad entonces:

A'B'=12cm·(2/3)=8cm;   A'C'=7,5cm·(2/3)=5cm; B'C'=9cm·(2/3)=6cm

Ejercicio 8. **En la figura adjunta calcular AM y MN sabiendo que MN paralelo a BC.**



Si son paralelos los lados entonces cumple Tales:

$$\frac{NB}{MC}=\frac{AN}{AM}\rightarrow\frac{6}{4{,}8}=\frac{12}{AM}\rightarrow AM=9{,}6cm$$

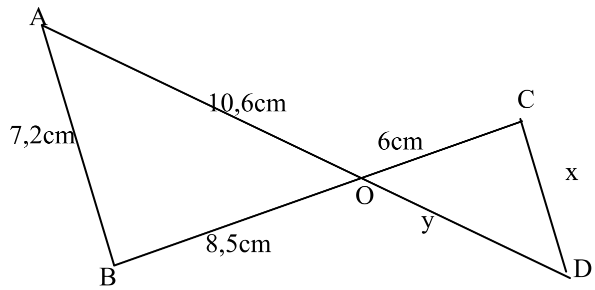
Para calcular el lado MN no podemos aplicar Tales, sino las propiedades de triángulos semejantes (AMN y ACB):

$$\frac{AN}{AB}=\frac{NM}{BC}\rightarrow\frac{12}{18}=\frac{MN}{8{,}4}\rightarrow MN=5{,}6cm$$

Ejercicio 9. **En la siguiente figura AB paralelo a CD. Decir:**

a) Por que son semejantes los triángulos OAB y ODC

b) calcular x e y.



a) Son semejantes porque tienen los tras ángulo iguales: el ángulo del vértice O por ser ángulos opuestos de rectas secantes y los otros dos por estar formados por rectas paralelas.

b) $\frac{6}{8{,}5}=\frac{x}{7{,}2}=\frac{y}{10{,}6}$ → x≈5,08cm, y≈7,48cm

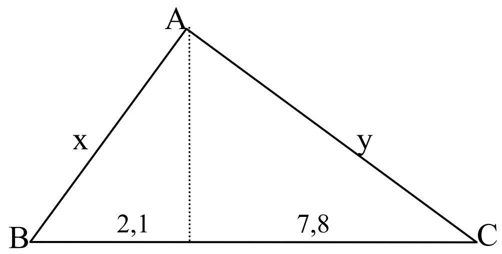
***Ejercicio 10.*. En un triángulo ABC, AB mide 5,7m y la altura relativa a dicho lado es 9,5 m. ¿Cuánto mide el área de otro triángulo semejante en donde A'B'=4,14m?**

a(ABC)=$\frac{1}{2}\cdot 5{,}7\cdot 9{,}5 = 27{,}075\cdot m^2$

a(A'B'C')=$k^2\cdot$a(ABC) ≈14,3·m^2

k=$\frac{4{,}14}{5{,}7}\approx 0{,}73$

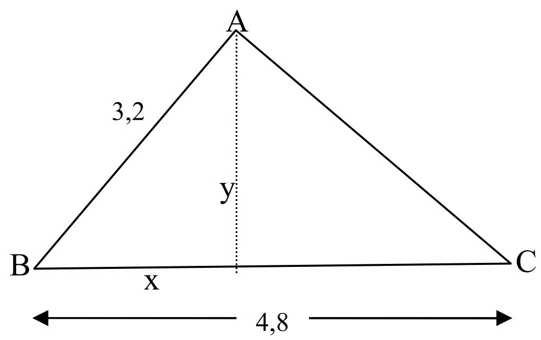
***Ejercicio 11.* Hallar x e y en los siguientes triángulos rectángulos:**



Teorema del cateto

$x^2=2{,}1\cdot(2{,}1+7{,}8) \rightarrow x\approx 4{,}56$

$y^2=7{,}8\cdot(2{,}1+7{,}8) \rightarrow y\approx 8{,}79$



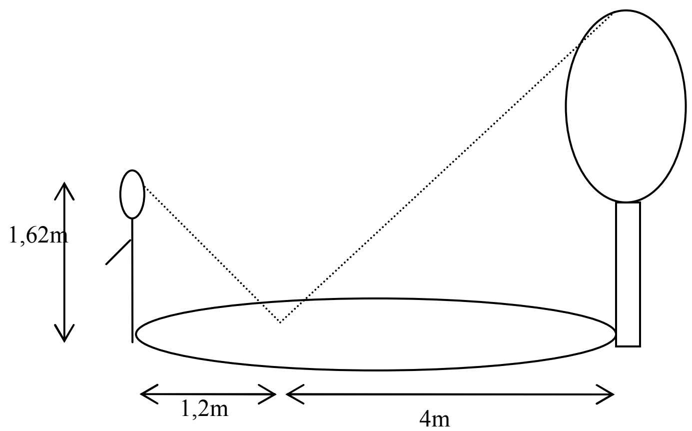
Teorema de la cateto:

$3{,}2^2=x\cdot 4{,}8 \rightarrow x\approx 2{,}13$

Teorema de la altura:

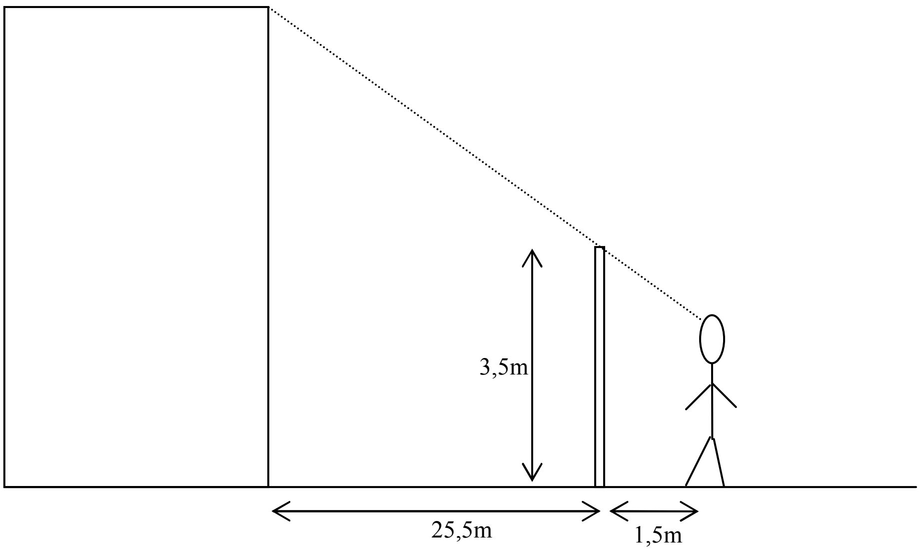
$y^2=2{,}13\cdot(4{,}8-2{,}13) \rightarrow y\approx 2{,}4$

***Ejercicio 12.* Calcular la altura del árbol sabiendo que Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las siguientes medidas:**

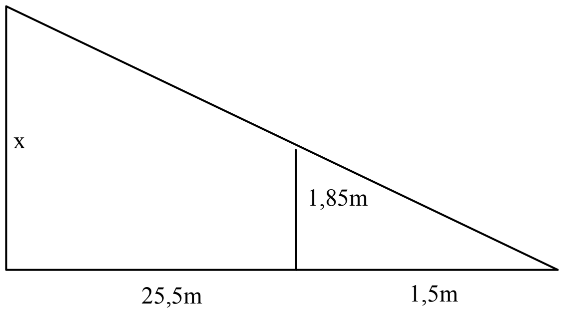


Son triángulos rectángulo semejantes pues en la reflexión de la luz los ángulos incidente y reflejado son iguales. Luego los lados semejantes→ $\frac{1{,}62}{1{,}2}=\frac{x}{4} \rightarrow x = 5{,}4m$.

Ejercicio 13. **Para medir la altura de una casa Álvaro cuya altura hasta los ojos es de 165cm, se situó a 1,5m de una verja y tomó las medidas del dibujo. ¿Cuánto mide de la casa?**



Podemos obtener del dibujo los siguientes triángulos en posición de Tales (semejantes):



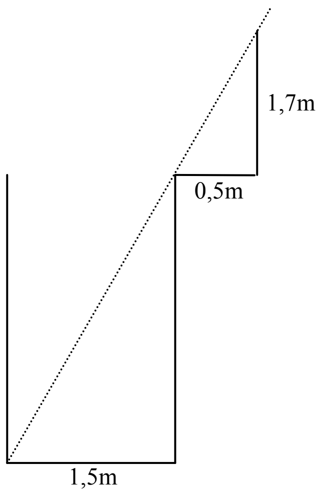
Como son semejantes los lados proporcionales:

$$\frac{x}{1{,}85} = \frac{27}{1{,}5} \rightarrow x = 33{,}3\,m$$

Luego h=33,3+1,65=34,95 m

Ejercicio 14. **¿Cuál es la profundidad del pozo si su anchura es 1,5m y alejándote 0,5 m del borde desde una altura de 1,7 m ves en la misma visual el borde del pozo y la esquina del fondo?**

Tenemos que se forman dos triángulos rectángulos semejantes ya que tienen un ángulo igual. Por esta razón los lados son proporcionales:



$$\frac{1{,}5}{0{,}5}=\frac{x}{1{,}7}\to x=5{,}1\,m$$