EJERCICIOS RESUELTOS DE PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

UN POCO DE HISTORIA: **UN NIÑO LLAMADO GAUSS**

Hace poco más de dos siglos, un maestro alemán que quería paz y tranquilidad en su clase propuso a sus alumnos que calcularan la suma de los números del 1 al 100.

A Carl Friedrich Gauss (10 añitos) se le ocurrió lo siguiente, en primer lugar escribió la suma de los 1000 números en el orden normal:

1+2+3+………………………+98+99+100. Después escribió la suma al revés
100+99+98+………………………+3+2+1

Y después fue sumando el número de arriba con el correspondiente de debajo

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 \\ 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

Se dio cuenta que todas las parejas sumaban 101, por tanto el resultado de la suma que tenemos planteada será 101x100, como en esta suma hemos calculado el doble de la cantidad que queríamos, tendremos entonces que la suma de los números del 1 al 100 será: $\frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$

Carl Friedrich Gauss fue un famoso matemático y astrónomo alemán (1777-1855).

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar el vigésimo término de la progresión aritmética: -15, -12, -9, -6, ...

$a_1 = -15$; $d = -12 - (-15) = -12 + 15 = 3$; $n = 20$; $a_n = ?$

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$$

$$a_{20} = -15 + (20 - 1)\, 3$$

$$= -15 + 57 = 42$$

$$\boxed{\mathbf{a_{20} = 42}}$$

2. La suma de los cuatro primeros términos de una PA creciente es 56 y el término mayor es 20. Escribe esos cuatro términos.

Como $a_4 = 20$, $S_4 = 56$ y $n = 4$. se tiene:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow 56 = \frac{a_1 + 20}{2} \cdot 4 \rightarrow \frac{56 \cdot 2}{4} = a_1 + 20 \rightarrow 28 = a_1 + 20$$, de donde: $a_1 = 8$.

Por otro lado $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, entonces se tiene:

$$20 = 8 + (4 - 1)d \;;\quad d = \frac{20 - 8}{2} = 4$$

Solución: los cuatro primeros términos son: 8, 12, 16, 20

3. Conociendo que en una PA el término $a_{100} = 199$ y que la suma de los 100 primeros términos es 10.000, calcular el primero y la diferencia.

$a_{100} = 199$; $n = 100$; $S_{100} = 10.000$; $a1 = ?$; $d = ?$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow 10000 = \frac{a_1 + 199}{2} \cdot 100 \rightarrow \frac{10000 \cdot 2}{100} = a_1 + 199$$

200 = a_1 + 199; $\boxed{\mathbf{a_1 = 1}}$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_{100} = a_1 + (100-1) \cdot d$$

199 = 1 + (100 – 1) · d → 198 = 99d → $\boxed{\mathbf{d = 2}}$

4. Dada la sucesión -6, 1,8,15,…

a) ¿Es una progresión aritmética?

$1-(-6)=7$

$8-1=7$ Es una p.a. de $a_1=-6$ y $\mathbf{d=7}$

$15-8=7$

b) Escribe sus ocho primeros términos.

$-6,1,8,15,22,29,36,43$

c) Calcula su término general.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_n = -6 + (n-1) \cdot 7 \Rightarrow a_n = 7n - 13$

d) Calcula el **término 11**. ¿Cuánto vale a_{20}?

$a_{11} = 7 \cdot 11 - 13 = 64$

$a_{20} = 7 \cdot 20 - 13 = 127$

e) ¿Es **197** un término de la sucesión? ¿Y **224**?

Partimos del término general $a_n = 7n - 13$

Resolvemos la ecuación $197 = 7n - 13 \Rightarrow n = 30$. Luego $a_{30} = 197$

De igual manera, resolvemos la ecuación $224 = 7n - 13 \Rightarrow n = \frac{237}{7}$ Vemos que **n** (posición del término en la sucesión) no es un número natural. **224** no es un término de esta progresión.

5. Calcular la suma de los doce primeros términos de una PA de diferencia 4, sabiendo que el primero vale 7.

a_1 = 7; n = 12; S_{12} = ?

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_{12} = a_1 + (12-1) \cdot d \rightarrow a_{12} = 7 + 11 \cdot 4 = 51$$

199 = 1 + (100 – 1) · d → 198 = 99d → $\boxed{\mathbf{d = 2}}$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{7 + 51}{2} \cdot 12 = 348$$

$\boxed{\mathbf{S_{12} = 348}}$

6. Calcular la suma de los n primeros términos de una PA, cuyo primer término es 4 y cuya diferencia es 3, sabiendo que el término n es 40.

S_n = ?; n = ?; a_1 = 4; a_n = 40; d = 3

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 4 + (n-1) \cdot 3 \rightarrow 40 = 4 + 3n - 3 \rightarrow 40 - 4 + 3 = 3n$$

De donde $\boxed{\mathbf{n=13}}$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow S_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2} \cdot 13 = \frac{4 + 40}{2} \cdot 13 = 286$$

$\boxed{\mathbf{S_{13} = 286}}$

7. Conociendo el primer término de una PA. 3 y el doce 25, determinar la diferencia y la suma de los doce primeros.

S_n = ?; n = 12; a_1 = 3; a_{12} = 25; d = ?

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \rightarrow a_{12} = a_1 + (12-1)\cdot d \rightarrow 25 = 3 + 11d \rightarrow 25 - 3 = 11d \rightarrow 22 = 11d \rightarrow \boxed{\mathbf{d = 2}}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \rightarrow S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2}\cdot 12 = \frac{4+25}{2}\cdot 12 = 168$$

$$\boxed{\mathbf{S_{12} = 168}}$$

8. De una progresión aritmética conocemos los términos $\mathbf{a_8 = 29}$ y $\mathbf{a_{11} = 44}$. Calcula:

a) La diferencia de la sucesión y el primer término.

$$a_n - a_k = (n-k)\cdot d$$

$$a_{11} - a_8 = 3d \Rightarrow 44 - 29 = 3d \Rightarrow d = 5$$

$$a_8 - a_1 = 7d \Rightarrow 29 - a_1 = 7\cdot 5 \Rightarrow a_1 = 29 - 35 \Rightarrow a_1 = -6$$

b) El término general de sucesión.

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$a_n = -6 + (n-1)\cdot 5 \Rightarrow a_n = 5n - 11$$

9. Hallar el número de términos de una progresión aritmética que tiene por primer término 7, por último 112 y por diferencia 3.

n = ?; a_1 = 7; a_n = 112; d = 3

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \rightarrow 112 = 7 + (n - 1)\cdot 3$$

112 = 7 + 3n - 3

112 = 4 + 3n

3n = 108; **n = 36**

$$\boxed{\mathbf{n = 36}}$$

10. Conociendo el primer término de un PA es 3, cierto término es 39 y que la suma de todos los términos entre los dos anteriores es 210, calcula la diferencia y el lugar que ocupa el término 39.

a_1 = 3; a_n = 39; S_n = 210; d = ?; n = ?

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \rightarrow 210 = \frac{3+39}{2}\cdot n \rightarrow 210 = \frac{42}{2}\cdot n \rightarrow 210 = 21n \rightarrow n = 10$$

$$\boxed{\mathbf{n = 10}}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \rightarrow a_{10} = a_1 + (10-1)\cdot d$$

$$39 = 3 + 9 \cdot d \rightarrow 39 - 3 = 9d \rightarrow \boxed{\mathbf{d = 4}}$$

11. Calcular la suma de todos aquellos números que, teniendo tres cifras, son múltiplos de 7.

Debemos buscar el primer número de tres cifras que sea divisible por 7, da 105 y luego debemos buscar el número más grande de tres cifras que sea divisible por 7, veremos que da 994.

$$a_1 = 105;\ a_n = 994;\ d = 7$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \rightarrow 994 = 105 + (n - 1) \cdot 7$$

$$994 - 105 = (n - 1) \cdot 7$$

$$889 / 7 = n - 1 \rightarrow n = 128$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{105+994}{2}\cdot 128 = 70336$$

$$\boxed{\mathbf{S_n = 70.336}}$$

12. Formar una PA de términos positivos de diferencia 2 sabiendo que el último de ellos es18 y que entre todos suman 88.

$$d = 2;\ a_n = 18;\ S_n = 88$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \rightarrow 18 = a_1 + (n-1)\cdot 2 \rightarrow a_1 = 20 - 2n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \rightarrow 88 = \frac{a_1 + 18}{2}\cdot n \rightarrow 88 = \frac{20-2n+18}{2}\cdot n \rightarrow 176 = (38-2n)\cdot n$$

De donde: $2n^2 - 38n + 176 = 0$; y simplificando: $n^2 - 19n + 88 = 0$

Resolviendo le ecuación de segundo grado hallamos los valores de n; n = 11; n = 8

Para n = 11; $a_1 = 20 - 2n$; $a_1 = 20 - 22$; $a_1 = -2$; no cumple el enunciado

Para n = 8; $a_1 = 20 - 2n$; $a_1 = 20 - 16$; $a_1 = 4$

Los 8 primeros términos son: 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18

13. Cual será la profundidad de un pozo si por el primer metro se han pagado 760 € y por cada uno de los restantes, 150€ más que el metro anterior. El pozo ha costado 43700€.

$$n = ?;\ a_1 = 760;\ d = 150;\ S_n = 43.700$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 760 + (n-1)\cdot 150 \rightarrow a_n = 610 + 150n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \rightarrow 43700 = \frac{760 + a_n}{2}\cdot n \rightarrow 43700 = \frac{760+610+150n}{2}\cdot n \rightarrow 87400 = (1370 + 150n)\cdot n$$

De donde: 87400 = 1370n + 150n2; y simplificando: $15n^2 + 137n - 8740 = 0$

Resolviendo le ecuación de segundo grado hallamos los valores de n; n = 20;

$\boxed{n = 20}$

14. Calcula la suma de los **80** primeros **múltiplos de 4**.

Los múltiplos consecutivos de 4 es una p.a. de término general $a_n = 4n$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_{80} = \frac{(a_1 + a_{80})}{2} \cdot 80 \qquad a_1 = 4 \quad a_{80} = 320$$

$$S_{80} = \frac{(4 + 320)}{2} \cdot 80 = 12960$$

15. Hallar los cuatro ángulos de un cuadrilátero, sabiendo que forman p.a. de razón igual a 25º.

n = 4; d = 25; S_n = 360º

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow 360 = \frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 \rightarrow 180 = a_1 + a_4 \rightarrow a_4 = 180 - a_1$$

$a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot d \rightarrow 180 - a_1 = a_1 + 3 \cdot 25;$

$180 = 2\,a_1 + 75$; de donde $2\,a_1 = 105$; $a_1 = 52'5$

Solución: 52º 30'; 77º 30'; 102º 30'; 127º 30'.

16. Interpolar 10 elementos entre los números 3 y 25, para que formen progresión aritmética.

NOTA***: interpolar***, quiere decir meter entre los dos extremos de la progresión el número de términos que nos pidan. Por ello nuestra progresión cuanta con doce términos (los dos extremos más los diez que debemos interpolar)

$a_1 = 3$; $a_{12} = 25$; d = ?;

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow 25 = 3 + (12-1) \cdot d \rightarrow 22 = 11d \rightarrow d = 2$$

Luego, los doce términos son: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25

17. Interpolar seis medios aritméticos entre 1 y 29

$a_1 = 1$, $a_n = a_8 = 29$, n = 8 (seis medios aritméticos y los dos extremos)

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow 29 = 1 + (8-1) \cdot d \rightarrow d = \frac{29-1}{8-1} = \frac{28}{7} = 4$$

d = 4

Entonces la progresión aritmética es: 1; **5; 9; 13; 17; 21, 25**; 29

LA LEYENDA DEL INVENTOR DEL AJEDREZ

Cuenta la leyenda que el rey Shirham, rey de la India, estaba muy deprimido por haber perdido a su hijo en una batalla. Un sabio de su corte llamado Sissa Ben Dahir le llevó el juego del ajedrez para animarlo y le enseñó a jugar. El rey Shirham, quedó tan impresionado con el juego que se ofreció a regarle a su inventor lo que pidiera como recompensa.

Así, el inventor para darle una lección de humildad, le pidió lo siguiente: un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta... y así sucesivamente, duplicando en cada casilla la cantidad de la anterior hasta llegar a la última.

El rey extrañadísimo de lo poco con lo que se conformaba ordenó que le dieran lo que pedía, pero cuando cuando sus contables echaron cuentas, vieron asombrados, que no había trigo en el reino, ni siquiera en toda la tierra para juntar esa cantidad.

¿De qué cantidad estamos hablando? ¿Ante qué tipo de progresión estamos?

Solución

Primero debes saber que el tablero consta de 64 casillas, luego la cantidad de grano de recompensa vendrá dada por la suma de los granos de cada una de esas casillas.

Además nos dice que los granos de cada casilla se obtienen multiplicando por 2 el número de granos situados en la primera casilla, que es 1, es decir, que van a estar en una progresión geométrica donde el primer término es 1 y la razón 2: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 16$, ...

Y como en una progresión geométrica la suma de n términos viene dada por la expresión: $S_n = \dfrac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1}$, llegamos a:

$$S_{64} = \frac{1 \cdot 2^{64} - 1}{2-1} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \cong 1{,}8 \cdot 10^{19}$$

Es decir, el número de granos es: dieciocho trillones, cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones, setenta y tres mil setecientos nueve millones, quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince granos de trigo. La cifra final es tan elevada que sobrepasa la producción mundial de trigo de la actualidad.

18. Comprueba que las siguientes sucesiones son progresiones geométricas, halla el término general y el valor del término duodécimo.

a) $5, \dfrac{15}{2}, \dfrac{45}{4}, \dfrac{135}{8}, \ldots$ b) +1, –1, +1, –1, ... c) –1, +1, –1, +1, ...

a) Para $5, \dfrac{15}{2}, \dfrac{45}{4}, \dfrac{135}{8}, \ldots$ se cumple que: $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{15/2}{5} = \dfrac{15}{10} = \dfrac{3}{2}$, y lo mismo sucede para

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{45/4}{15/2} = \frac{90}{60} = \frac{3}{2}, \text{ luego es una PG}$$

Como $a_1 = 5$ y $r = \dfrac{3}{2}$, su término general será: $\boxed{a_n = 5 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}}$.

Por tanto, $\boxed{a_{12} = 5 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{11} = \dfrac{885735}{2048}}$

b) Para +1, −1, +1, −1, ..., el cociente entre dos términos consecutivos es siempre −1

Por tanto, r = −1.

Su término general es $\boxed{a_n = 1\cdot(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}}$.

Luego $\boxed{a_{12} = (-1)^{11} = -1}$

c) Para −1, +1, −1, +1, ... que también tiene razón −1.

Su término general es $\boxed{a_n = (-1)\cdot(-1)^{n-1} = (-1)^n}$.

Luego $\boxed{a_{12} = 1}$

19. Dada la sucesión **16,-8,4,-2,...**

a) ¿Es una progresión aritmética?

$-8-16=-24$

$4-(-8)=12$ No es una p.a. porque la diferencia entre dos términos consecutivos es no es constante.

b) ¿Es una progresión geométrica?

$-8:16=-0,5$

$4:(-8)=-0,5$ Es una p.g. de $a_1=16$ y $r=-\dfrac{1}{2}$

$-2:4=-0,5$

c) Escribe los ocho primeros términos.

$16,-8,4,-2,1,\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{-1}{8}$

d) Calcula su término general.

$a_n = a_1\cdot r^{n-1}$

$a_n = 16\cdot\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{n-1}$

e) Calcula el **término noveno**. ¿Cuánto vale a_{12}?

$a_9 = 16\cdot\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{9-1} = 16\cdot\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{8} = \dfrac{16}{256} = \dfrac{1}{16}$

$a_{12} = 16\cdot\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{12-1} = \dfrac{-1}{128}$

20. Calcula el término general de la PG: 1, 2, 4, 16, 32, ... Calcula los términos $a_{10}\ y\ a_{45}$

Se trata de una progresión geométrica de razón r = 2.

Su término general será: $\boxed{a_n = 1\cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}}$.

Por tanto $\boxed{a_{10} = 2^9 = 512}$.

Y $\boxed{a_{45} = 2^{44} = 17592186044416}$.

21. Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión 1, 2, 4, 8, ...

Se trata de una PG, de razón r = 2 y cuyo primer término es $a_1 = 1$

Como $S_n = \dfrac{a_1 r^n - a_1}{r-1} \to S_{10} = \dfrac{1\cdot 2^{10}-1}{2-1} = 2^{10}-1 = 1023$.

Luego $\boxed{S_{10} = 1023}$

22. Calcula la suma de todos los términos de la PG siguientes
    a. 100, 50, 25, 12’5 ...
    b. 7, 7/3, 7/9, 7/27…

a) Se trata de una PG de razón r = $\frac{1}{2}$ y cuyo primer término es $a_1 = 100$

Como $S = \frac{a_1}{1-r} \rightarrow \boxed{S = \frac{100}{1-1/2} = 200}$

b) Se trata de una PG de razón r = $\frac{1}{3}$ y cuyo primer término es $a_1 = 7$

Como $S = \frac{a_1}{1-r} \rightarrow \boxed{S = \frac{7}{1-1/3} = \frac{7}{1} : \frac{2}{3} = \frac{21}{2} = 10'5}$

23. Calcula el producto de los 10 primeros términos de la progresión geométrica 3, 6, 12, 36, ..

Ejercicio de ampliación. La fórmula del producto de los n primeros términos de una PG es

$$\boxed{P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$$

Por tanto $P = \sqrt{(a_1 \cdot a_{10})^{10}} = \sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^9)^{10}} = \sqrt{3^{20} \cdot 2^{90}} = 3^{10} \cdot 2^{45}$

24. Calcula el producto de los 16 primeros términos de la progresión geométrica 256, 128, 64, ..

Siguiendo el ejercicio anterior: $a_{16} = a_1 \cdot r^{15} = 256 \cdot 2^{15}$

$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_{16})^{16}} = \sqrt{(256 \cdot 256 \cdot 2^{15})^{16}} = \sqrt{(2)^{14}} = 2^7$