MATRICES

Definición de matriz.

Una matriz A de orden m×n es un conjunto de m×n elementos pertenecientes a un conjunto, que para nosotros tendrá estructura de cuerpo conmutativo y lo denotaremos por K, dispuestos en m filas y n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots & a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m.1} & a_{m.2} & \cdots & a_{m.n} \end{pmatrix} = \left(a_{i.j}\right)_{\substack{i=1,2,3,\ldots,m \\ j=1,2,3,\ldots n}}$$

K puede ser el cuerpo R ó C y en caso de no decir nada en contra será el cuerpo de los reales.

Cada elemento de una matriz lleva dos subíndices, el primero corresponde a la fila del elemento y el segundo a la columna.

Nomenclatura.

Sí m=1, se llama matriz fila.
Sí n=1, se llama matriz columna.
Sí m≠n, se llama matriz rectangular.
Sí m=n, se llama matriz cuadrada.

Notaciones

Al conjunto de matrices de orden m×n, cuyos elementos toman valores en cuerpo K se denota por M(m,n,K).

Sí K=R, es usual la notación M(m,n) ó $\mathcal{M}_{m\times n}$ en lugar de M(m,n,R).

El conjunto de matrices cuadradas de orden n se denota por M(n,K). Sí K=R, se suele denotar $\mathcal{M}$(n) ó $\mathcal{M}_{nxn}$

Matriz nula (0) es aquella matriz en que $a_{ij}=0$ $\forall i=1,2,\ldots,m$, $\forall j=1,2,\ldots,n$. Hay una matriz nula para cada orden de matrices.

Se define como **diagonal principal** de una matriz cuadrada A de orden n a los elementos de la forma:

$$a_{ii} \quad \forall i=1,2,\ldots,m$$

Se define como **traza de una matriz** cuadrada A, a la suma de los elementos de la diagonal principal

$$\text{Traza } A = \text{Tr}(A) = a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$$

Operaciones con matrices. Propiedades y estructura de las operaciones.

a) **Igualdad**: Dos matrices A y B del mismo orden m×n son iguales sí $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall$ i =1,2,...,m, y $\forall$ j =1,2,...,n

b) **Suma**: Dadas dos matrices A y B del mismo orden m×n se define la matriz suma C=A+B como la matriz de orden m×n tal que

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad \forall i=1,2,\ldots,m, \ \forall j=1,2,\ldots,n$$

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots & a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m.1} & a_{m.2} & \cdots & a_{m.n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1.1} & b_{1.2} & \cdots & b_{1.n} \\ b_{2.1} & b_{2.2} & \cdots & b_{2.n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m.1} & b_{m.2} & \cdots & b_{m.n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1.1}+b_{1.1} & a_{1.2}+b_{1.2} & \cdots & a_{1.n}+b_{1.n} \\ a_{2.1}+b_{2.1} & a_{2.2}+b_{2.2} & \cdots & a_{2.n}+b_{2.n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m.1}+a_{m.1} & a_{m.2}+a_{m.2} & \cdots & a_{m.n}+a_{m.n} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma:

- Commutativa. A + B = B + A
- Asociativa. (A + B) + C = A + (B + C)
- Elemento neutro. A + 0 = A
- Elemento opuesto. A + (−A) = 0

c) **Producto por un número**: Dada una matriz A de orden m×n y un elemento λ∈R la matriz B = λ·A (producto de la matriz A por el número λ) es una matriz de orden m×n cuyo elemento genérico

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \quad \forall \text{ I} =1,2,\ldots,m, \ \forall j=1,2,\ldots,n$$

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots & a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m.1} & a_{m.2} & \cdots & a_{m.n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{1.1} & \lambda\cdot a_{1.2} & \cdots & \lambda\cdot a_{1.n} \\ \lambda\cdot a_{2.1} & \lambda\cdot a_{2.2} & \cdots & \lambda\cdot a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\cdot a_{m.1} & \lambda\cdot a_{m.2} & \cdots & \lambda\cdot a_{m.n} \end{pmatrix}$$

Propiedades de producto por escalares

- $k\cdot(A + B) = k\cdot A + k\cdot B$
- $(k_1 + k_2)\cdot A = k_1\cdot A + k_2\cdot A$
- $(k_1\cdot k_2)\cdot A = k_1\cdot(k_2\cdot A)$
- $I\cdot A = A$
- $0\cdot A = 0$

d) **Producto de matrices**: Dadas dos matrices, A de orden m×n y B de orden n×p, su matriz producto C=A·B es una matriz de orden m×p. Para multiplicar matrices se toman los elemento de la 1ª matriz como vectores fila y los elementos de la 2ª matriz como vectores columnas, de está forma, la matriz producto estará formada por los productos escalares de los vectores fila de la 1ª matriz por los vectores columna de la 2ª matriz.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p} = \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \ldots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \ldots & a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m.1} & a_{m.2} & \ldots & a_{m.n} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{1.1} & b_{1.2} & \ldots & b_{1.p} \\ b_{2.1} & b_{2.2} & \ldots & b_{2.p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n.1} & b_{n.2} & \ldots & b_{n.p} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{a_{1.1}b_{1.1} + a_{2.1}b_{2.1} + \ldots + a_{1.n}b_{n.1}}^{F.1\cdot C.1} & \overbrace{a_{1.1}b_{1.2} + a_{2.1}b_{2.2} + \ldots + a_{1.n}b_{n.2}}^{F.1\cdot C.2} & \ldots & \overbrace{a_{1.1}b_{1.p} + a_{2.1}b_{2.p} + \ldots + a_{1.n}b_{n.p}}^{F.1\cdot C.p} \\ \overbrace{a_{2.1}b_{1.1} + a_{2.2}b_{2.1} + \ldots + a_{2.n}b_{n.1}}^{F.2\cdot C.1} & \overbrace{a_{2.1}b_{1.2} + a_{2.2}b_{2.2} + \ldots + a_{2.n}b_{n.2}}^{F.2\cdot C.2} & \ldots & \overbrace{a_{2.1}b_{1.p} + a_{2.2}b_{2.p} + \ldots + a_{2.n}b_{n.p}}^{F.2\cdot C.p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overbrace{a_{m.1}b_{1.1} + a_{m.2}b_{2.1} + \ldots + a_{m.n}b_{n.1}}^{F.m\cdot C.1} & \overbrace{a_{m.1}b_{1.2} + a_{m.2}b_{2.2} + \ldots + a_{m.n}b_{n.2}}^{F.m\cdot C.2} & \ldots & \overbrace{a_{m.1}b_{1.p} + a_{m.2}b_{2.p} + \ldots + a_{m.n}b_{n.p}}^{F.m\cdot C.p} \end{pmatrix}$$

La condición **<u>necesaria y suficiente</u>** para que dos matrices se puedan multiplicar es que el número de columnas de la 1ª matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz, ya que de esta forma el número de componentes de los vectores fila de la 1ª matriz será igual al número de componentes de los vectores columna de la 2ª matriz, pudiéndose en este caso multiplicar escalarmente ambos vectores.

<u>El producto de matrices no es conmutativo</u>, salvo en dos excepciones:

i) El producto de una matriz por su inversa. $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$

ii) El producto de una matriz por la matriz identidad. $A\cdot I = I\cdot A = A$.

Propiedades del producto de matrices

- Asociativa. $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$
- Distributiva por la izquierda. $A\cdot(B+C) = A\cdot B+A\cdot C$
- Distributiva por la derecha. $(B+C)\cdot A = B\cdot A+C\cdot A$
- $k\cdot(A\cdot B) = (k\cdot A)\cdot B = A\cdot(k\cdot B)$

Las principales estructuras del conjunto de las matrices M(m,n,K) son:

- Para la ley suma: **Grupo conmutativo**. Para las leyes suma y producto por un número: **Espacio vectorial**. La dimensión de este espacio vectorial es m×n. La base canónica de este espacio vectorial, son las matrices de orden mxn con todos los elementos 0, salvo un elemento de valor 1.
- Sí m=n, el conjunto M(n,K tiene, respecto a las operaciones de **suma y producto de matrices**, estructura de anillo unitario no conmutativo con divisores de cero. (El elemento unidad es la matriz unidad I, tal que todos sus elementos son 0 salvo los de la diagonal principal que valen 1).

e) **Trasposición de matrices**: Dada una matriz A de orden m×n se define su matriz traspuesta, que se denota ${}^tA$, A', ó A^t como la matriz que se obtiene al intercambiar en la matriz las filas con las columnas de tal forma que los términos de la matriz traspuesta se relacionan con los de la matriz inicial mediante la siguiente relación: $a'_{ij}=a_{ji}$ $\forall i=1,2,...,n$, $\forall j=1,2,...,m$. Si el el orden la matriz A en m×n, el su traspuesta será n×m.

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$: $A^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

Las principales propiedades de la trasposición de matrices son

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t+B^t$
- $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$
- $(k\cdot A)^t = k\cdot A^t$

f) **Inversa de una matriz**:

Sea A una matriz de orden n. Si existe una matriz $B\in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que

$$A\cdot B = B\cdot A = I_n$$

Se dice que A es invertible o no singular (regular).

En tal caso la matriz B se denomina **inversa** de A y se denota por A^{-1}.

No todas las matrices de orden n tienen inversa. La condición necesaria y suficiente para que una matriz de orden n tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.

Propiedades:

- La inversa de la matriz inversa es la propia matriz. $(A^{-1})^{-1} = A$
- Si dos matrices admiten inversa, la inversa del producto es el producto de las inversas cambiado de orden. $(A_1\cdot A_2)^{-1} = A_2^{-1}\cdot A_1^{-1}$
- La inversa de la traspuesta es igual a la traspuesta de la inversa. $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$

El cálculo de la matriz inversa se puede hacer por tres métodos diferentes:

- Método de Gauss.
- Método de Gauss-Jordan.
- Por determinantes

GAUSS:

Sea $A=\begin{pmatrix}a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3}\\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3}\\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3}\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & 1 & 0 & 0\\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & 0 & 1 & 0\\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{EQUIVALENTES}]{\text{TRANSFORMACIONES}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & b_{1.1} & b_{1.2} & b_{1.3}\\ 0 & 1 & 0 & b_{2.1} & b_{2.2} & b_{2.3}\\ 0 & 0 & 1 & b_{3.1} & b_{3.2} & b_{3.3}\end{array}\right)$$

se obtiene como inversa de A:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}b_{1.1} & b_{1.2} & b_{1.3}\\ b_{2.1} & b_{2.2} & b_{2.3}\\ b_{3.1} & b_{3.2} & b_{3.3}\end{pmatrix}$$

GAUSS–JORDAN

Se plantea como una ecuación donde la inversa de A (A^{-1}) es una matriz genérica con n×n incógnitas que se denomina X:

$$A\cdot X = I$$

la ecuación se resuelve multiplicando las dos matrices del primer término e igualando la matriz producto obtenida con la matriz identidad del segundo miembro término a término, obteniendo n sistemas de n ecuaciones con n incógnitas. La resolución de los n sistema permite calcular los n×n elementos de la matriz inversa.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, su matriz inversa será de la forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, y deberá cumplir la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

operando el primer miembro:

$$\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+t \\ 3x+2z & 3y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

igualando las dos matrices término a término:

$$\begin{cases} 1.1: 2x+z=1 \\ 1.2: 2y+t=0 \\ 2.1: 3x+2z=0 \\ 2.2: 3y+2t=1 \end{cases}$$

a partir de estas igualdades se pueden plantear dos sistemas de 2×2:

$$\begin{cases} 2x+z=1 \\ 3x+2z=0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} 2y+t=0 \\ 3y+2t=1 \end{cases}$$

las soluciones respectivas de cada sistema son (2 ,–3), (–1 ,2) por lo que la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

POR DETERMINANTES

$$A^{-1} = \frac{(\operatorname{adj} A)^t}{|A|}$$

Se realiza por pasos:

1. Se calcula el determinante de A: $\begin{cases} |A| = 0 \to \text{No } \exists A^{-1} \\ |A| \neq 0 \to \exists A^{-1} \end{cases}$
2. Se calcula la adj A
3. Se traspone la adjunta de A. $(\operatorname{adj} A)^t$
4. Se divide cada elemento de la traspuesta de la adjunta por el determinante de A

g) **Divisores de cero**

Un producto de matrices pueda dar la matriz nula sin ser nula ninguna de las matrices factores, a estas matrices se las denomina divisores de cero.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + (-3)\cdot 1 & 1\cdot 6 + (-3)\cdot 2 \\ (-2)\cdot 3 + 6\cdot 1 & (-2)\cdot 6 + 6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

h) **Cancelativa**

No siempre de una igualdad entre matrices del tipo

$$A \cdot B = C \cdot B$$

se puede deducir que

$$A = C$$

Solamente se podrá deducir en el caso de que $|B| \neq 0$

Principales tipos de matrices cuadradas.

Una matriz cuadrada de orden n es:

- **Triangular superior** sí $a_{ij} = 0 \ \forall i>j$. $\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ 0 & a_{2.2} & a_{2.3} \\ 0 & 0 & a_{3.3} \end{pmatrix}$
- **Triangular inferior** sí $a_{ij}=0 \ \forall i<j$. $\begin{pmatrix} a_{1.1} & 0 & 0 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & 0 \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{pmatrix}$
- **Diagonal** sí $a_{ij}=0$ sí $i\neq j$. $\begin{pmatrix} a_{1.1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2.2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3.3} \end{pmatrix}$
- **Escalar** sí es diagonal y $a_{ii}=a \ \forall i=1,2,...,n$. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$
- **Unidad** sí es escalar y $a_{ii}=1 \ \forall i=1,2,...,n$. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **Regular** sí tiene elemento inverso para la operación producto de matrices. A la matriz inversa se la denota por A^{-1}. $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$. (NOTA $|A|\neq 0$)
- **Singular** sí no es regular.
- **Simétrica** sí $A^t = A$
- **Antisimétrica** sí $A^t = -A$. (También se denomina hemisimétrica).
- **Periódica** si $\exists p\in N \ / \ A^{p+1} = A$. Sí p es el menor número que verifica la igualdad, p es el período.
- **Idempotente** sí $A^2 = A$.
- **Nilpotente** sí $\exists n\in N \ / \ A^n = 0$.
- **Involutiva** Si $A^2 = I$
- **Ortogonal** sí $A^t = A^{-1}$.
- **Hermítica** si coincide con la matriz traspuesta conjugada. Para obtener la matriz conjugada de una dada, se halla el conjugado de cada elemento. Tiene interés al trabajar con números **complejos**.
- **Antihermítica** sí es opuesta con la matriz traspuesta conjugada. Tiene interés al trabajar con números **complejos**.

Rango de una matriz.

El rango de una matriz A de orden $m\times n$ es el número de vectores fila o vectores columna linealmente independientes. Se denotará rang A, Rg A ó rg A.

El rango de una matriz como máximo será menor o igual a la menor de sus dimensiones. Para calcular el rango de una matriz hay dos métodos:

i) Método de Gauss. Se triangulariza la matriz, una vez triangularizada, el rango es el número de términos distintos de cero de la diagonal principal

ii) Por menores. El rango de una matriz es igual al orden del mayor menor distinto de cero que exista en la matriz.

Sea A una matriz de dimensión $m \times n$. Se llama menor de orden p de A al determinante de cada submatriz cuadrada formada por los elementos situados en las intersecciones de p filas y p columnas de A, es decir, obtenida suprimiendo las $m - p$ filas y las $n - p$ columnas restantes.

Se dice que el rango de una matriz A es r, y se escribe rg A = r, si:

- Hay algún menor de orden r no nulo.
- Cualquier menor de orden mayor r es nulo.

En él calculo del rango de una matriz ahorra mucho trabajo la técnica de orlar menores. De está forma, si se quiere estudiar el rango n en una matriz, se busca un menor de orden $n-1$ distinto de cero. Para saber si la matriz puede tener rango n, bastará estudiar los menores orlados del menor distinto de cero de un orden menor, es decir solo los menores de orden n que contengan al menor de orden $n-1$.

Ejemplo

La matriz más típica de este curso es la 3×4, que corresponde a la matriz ampliada de un sistema de 3×3, normalmente se verá de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & b_2 \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & b_3 \end{pmatrix}$$

en la matriz A existen cuatro menores de orden 3

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & b_2 \\ a_{3.1} & a_{3.2} & b_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_{1.1} & b_1 & a_{1.3} \\ a_{2.1} & b_2 & a_{2.3} \\ a_{3.1} & b_3 & a_{3.3} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} b_1 & a_{1.2} & a_{1.3} \\ b_2 & a_{2.2} & a_{2.3} \\ b_3 & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix}$$

tomando como referencia el menor de orden dos:

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} \\ a_{2.1} & a_{2.2} \end{vmatrix} \neq 0$$

sus menores orlados son:

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & b_2 \\ a_{3.1} & a_{3.2} & b_3 \end{vmatrix}$$

si alguno de ellos es distinto de cero, el rango de A será 3. Sí los dos son nulos, el rango de A será 2, no siendo necesario estudiar los otros dos menores de orden 3.

El $Rg(A \cdot B) = \text{mín}\ (RgA\ ,\ RgB)$

Subdivisión de una matriz en cajas.

Una matriz A puede subdividirse en cajas o submatrices considerando A como una matriz de menor orden cuyos elementos son matrices. A veces puede facilitar los cálculos.

EJEMPLO

Multiplicar las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ efectuando subdivisión por cajas.

SOLUCIÓN

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} : \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$