FUNCIONES RACIONALES. HIPÉRBOLAS

1. FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

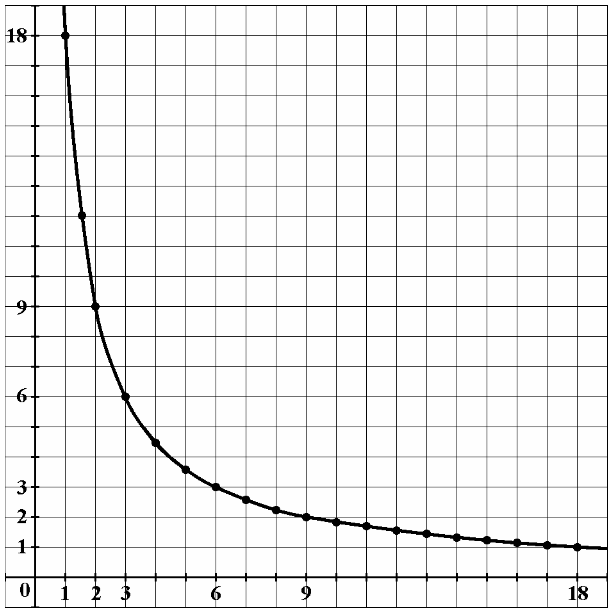
El área de un rectángulo es 18 cm^2. La siguiente tabla nos muestra algunas medidas que pueden tener la base y la altura.

$x \equiv$ base (cm)	1	1'5	2	3	4	6	10	15	…
$y \equiv$ altura (cm)	18	12	9	6	4'5	3	1'8	1'2	…

Observa que el producto de los valores correspondientes de las dos magnitudes es constante, por lo que ambas magnitudes son inversamente proporcionales, siendo 18 la constante de proporcionalidad.

Se verifica entonces que $\boldsymbol{x \times y = 18}$**,** de donde podemos deducir la expresión algebraica de esta función: $\boldsymbol{y = \frac{18}{x}}$**.**

La representación gráfica es la siguiente:



Observando la gráfica podemos obtener algunas consecuencias sobre la función:

– El dominio está formado por los valores positivos de la base. Observa que no está definida para $x = 0$.

– La imagen está formada por los valores positivos de las alturas.

– La función es continua y decreciente.

– Si la base del rectángulo crece, entonces la altura disminuye.

– Si la base del rectángulo decrece, entonces la altura aumenta.

> Las funciones cuya expresión es $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ se llaman ***funciones de proporcionalidad inversa*** y su gráfica recibe el nombre de ***hipérbola,*** siendo $\boldsymbol{k}$ la constante de proporcionalidad.

EJERCICIOS

1. La siguiente tabla muestra el tiempo de llenado de un depósito en función del numero de grifos abiertos.

$x \equiv$ nº de grifos	2	3		5	6
$y \equiv$ tiempo (horas)	12	8	6		

   a) Completa la tabla.
   b) ¿Son magnitudes inversamente proporcionales? ¿Por qué?
   c) Halla la función que se ajusta a estos valores y represéntala gráficamente.
   d) ¿Cuántas horas son necesarias para llenar el depósito si disponemos de 8 grifos abiertos?
   e) Si queremos llenar el depósito en una hora y media, ¿cuántos grifos debemos abrir?

2. El área de un triángulo es igual a 24 cm^2. Forma una tabla para los distintos valores de la base y la altura. Escribe la función correspondiente y represéntala.

3. Un ortoedro tiene altura constante igual a 10 m. Sabiendo que su volumen es constante e igual a 360 m^3, forma una tabla para los distintos valores de largo y ancho. Escribe la función correspondiente y represéntala.

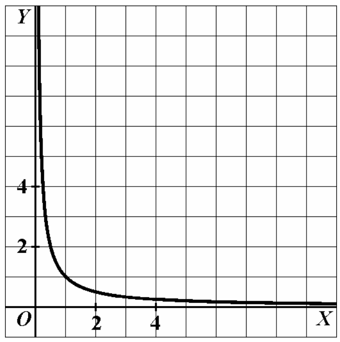
1.1. Propiedades y comportamiento asintótico

- Representemos la función de proporcionalidad inversa $y = \dfrac{1}{x}$.

  Observemos primeramente que esta función no está definida para $x = 0$, por lo que Dom $f = \mathbf{R} - \{0\}$.

  Para valores de *x* positivos:

x	$y = \dfrac{1}{x}$
0'001	1.000
0'1	10
0'25	4
0'5	2
1	1
2	0'5
4	0'25
10	0'1
1.000	0'001



Comportamiento asintótico.

> Se dice que una recta es ***asíntota*** de una función cuando la gráfica de la función se acerca cada vez más a ella, sin llegar a tocarla.

Observa que a medida que se van dando valores más grandes a x, el valor de y se hace cada vez más pequeño, aproximándose en este caso a 0. Es decir, la función se aproxima a la recta de ecuación $\boldsymbol{y = 0}$.

Esto se expresa del siguiente modo: $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Cuando una función se comporta así, se dice que tiene un ***comportamiento asintótico.*** La recta a la que se acerca la función se llama ***asíntota horizontal.***

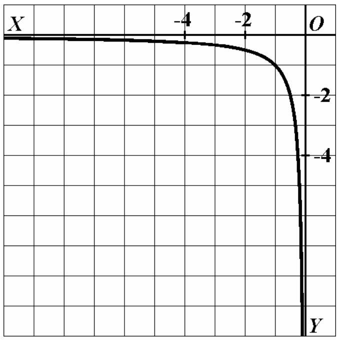
Por otra parte, esta función no tiene en su dominio el punto de abscisa $x = 0$. Sin embargo, se pueden dar a x valores tan próximos a 0 como se quiera. Si observamos la tabla, a medida que se van dando valores a x próximos a cero, el valor de y se hace cada vez más grande. Es decir, la función se aproxima a la recta de ecuación $\boldsymbol{x = 0}$.

Esto se expresa del siguiente modo: $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

La recta a la que se acerca la función se llama ***asíntota vertical.***

<u>Para valores de *x* negativos:</u>

x	$y=\dfrac{1}{x}$
–0'001	–1.000
–0'1	–10
–0'25	–4
–0'5	–2
–1	–1
–2	–0'5
–4	–0'25
–10	–0'1
–1.000	–0'001



<u>Comportamiento asintótico.</u>

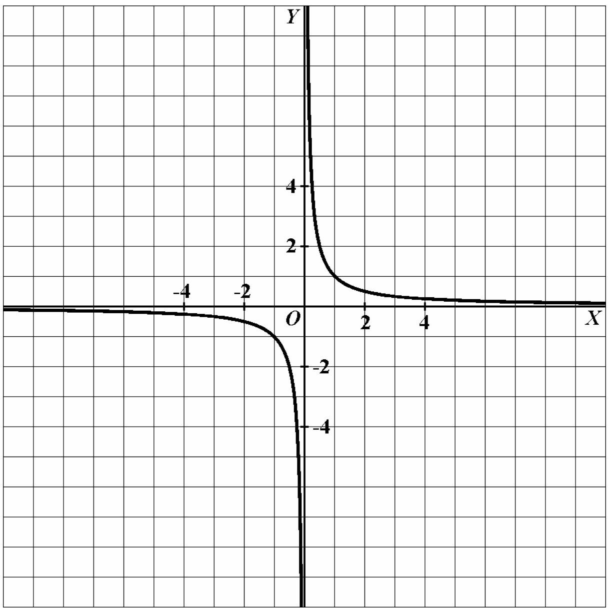
De manera análoga al caso anterior, a medida que se van dando valores más pequeños a x, el valor de y se hace cada vez más pequeño, aproximándose también a 0. Igualmente la función se aproxima a la recta de ecuación $\boldsymbol{y = 0}$.

La recta $y = 0$ es una *asíntota horizontal*: $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

También podemos dar a x valores tan próximos a 0 como se quiera. Observando la tabla vemos que a medida que se van dando valores a x más próximos a cero, el valor de y se hace cada vez más pequeño, aproximándose la función a la recta de ecuación $\boldsymbol{x = 0}$.

La recta $x = 0$ es una *asíntota vertical*: $f(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$

Representando las dos ramas en los mismos ejes se obtiene la gráfica de la función $y=\dfrac{1}{x}$.



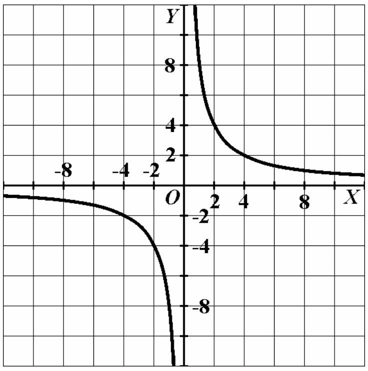
A la vista de la gráfica observamos que:

- La función no está definida en el origen.
- Es continua en todos los puntos salvo en $x = 0$, que no pertenece al dominio.
- Es siempre decreciente.
- Es simétrica respecto al origen de coordenadas.
- Las rectas de ecuación $y = 0$ y $x = 0$ (ejes de coordenadas) son, respectivamente, sus asíntotas horizontal y vertical.
- El punto donde se cortan las asíntotas, en este caso el origen de coordenadas, se llama *centro de la hipérbola.*

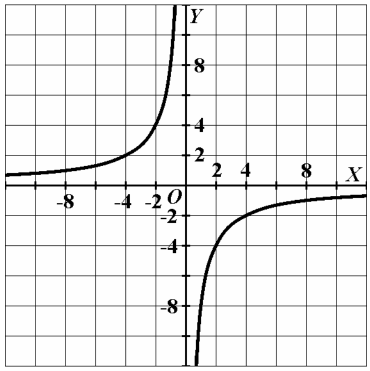
- Vamos a representar ahora las hipérbolas de ecuación $y = \dfrac{8}{x}$ e $y = \dfrac{-8}{x}$.

  Para ello construimos las respectivas tablas de valores y representamos las gráficas:

x	$y = \dfrac{8}{x}$
…	…
–8	–1
–4	–2
–2	–4
–1	–8
1	8
2	4
4	2
8	1
…	…



x	$y = \dfrac{-8}{x}$
…	…
–8	1
–4	2
–2	4
–1	8
1	–8
2	–4
4	–2
8	–1
…	…



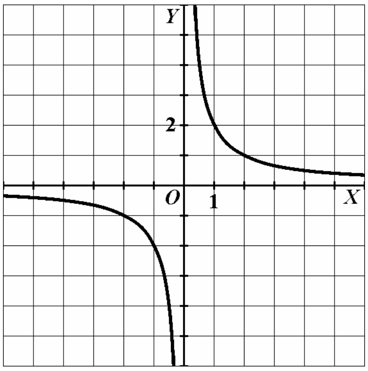
- A la vista de las gráficas estudiadas anteriormente se deducen las propiedades de estas funciones.

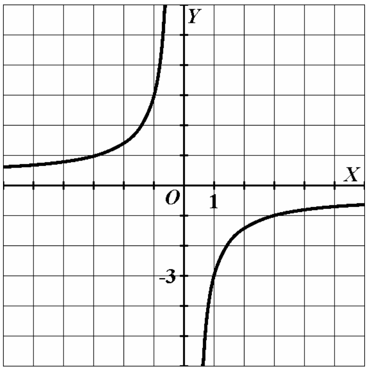
> La ***hipérbola*** de ecuación $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x}}$ tiene las siguientes propiedades:
>
> - Su **dominio** es el conjunto de los números reales a excepción del 0: **Dom *f*** = $\mathbb{R} - \{0\}$.
> - Igualmente, su **imagen** es **Im *f*** = $\mathbb{R} - \{0\}$.
> - La función es **continua** en todo su dominio.
> - Es **simétrica respecto del origen de coordenadas** (simetría impar) ya que $f(-x) = \dfrac{k}{-x} = -f(x)$.
> - Si $k > 0$, la función es siempre **decreciente** en todo intervalo que no contenga a $x = 0$.
>   Si $k < 0$, la función es siempre **creciente** en todo intervalo que no contenga a $x = 0$.
> - No tiene máximos ni mínimos.
> - Tiene por ***asíntota horizontal*** al eje de abscisas X (recta de ecuación $y = 0$): $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$
> - Tiene por ***asíntota vertical*** al eje de ordenadas Y (recta de ecuación $x = 0$): $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0^+ \\ x \to 0^-}]{} \pm\infty$
> - El origen de coordenadas, $C = (0, 0)$, es el ***centro de la hipérbola.***
> - No tiene puntos de corte con los ejes de coordenadas.

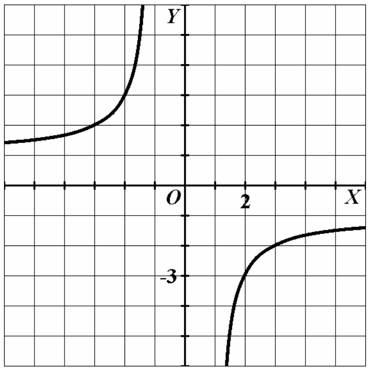
EJERCICIOS

4. El producto de dos números es −14. Forma una tabla de valores, escribe la función y represéntala.
5. Representa la hipérbola de ecuación $y = \dfrac{12}{x}$. Indica las asíntotas y el centro de la misma.
6. Contesta, razonadamente, las siguientes cuestiones.
   a) ¿Para qué valores de x la función $y = \dfrac{3}{x}$ es decreciente? ¿Y creciente la función $y = \dfrac{-2}{x}$?
   b) La función $y = \dfrac{2}{x}$, en $x = 0$, ¿tiene un máximo o un mínimo?
   c) Dada la función $y = \dfrac{4}{x}$, ¿a qué valor se va acercando y a medida que x toma valores cada vez mayores?

7. Las siguientes gráficas son hipérbolas. Razona cuál es la expresión de la función en cada caso.



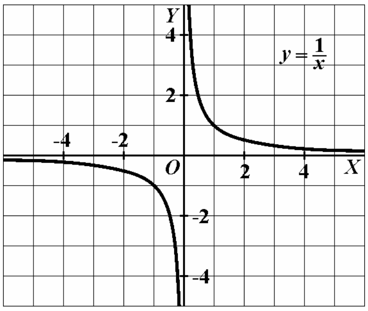


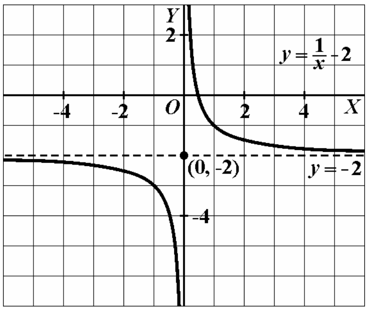


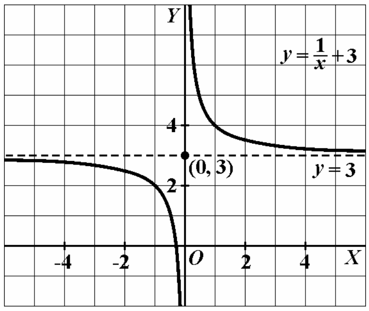
2. TRASLACIÓN DE HIPÉRBOLAS

Las hipérbolas $y = \dfrac{k}{x}$ son las más sencillas. Sus asíntotas son los ejes de coordenadas, y el centro de la hipérbola es el origen. A partir de estas hipérbolas se obtienen otras por traslación.

- **Traslación vertical:** $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x} + p}$

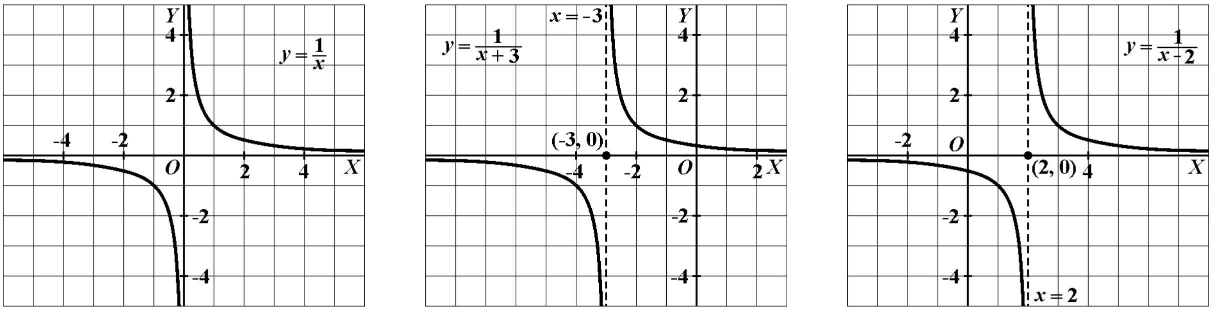






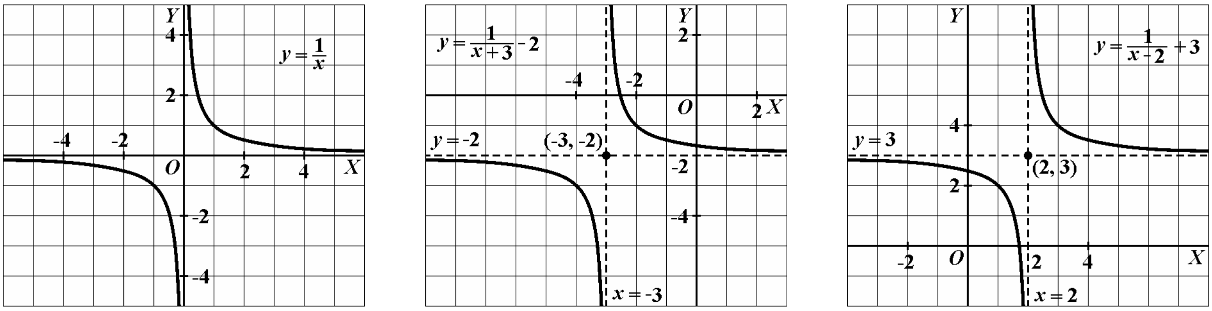
> Las funciones del tipo $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x} + p}$ son ***hipérbolas*** cuyo ***centro*** es el punto $\boldsymbol{C = (0, p)}$. Se obtienen trasladando verticalmente $\boldsymbol{p}$ unidades la gráfica de $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x}}$.
>
> - Si $\boldsymbol{p > 0}$, la traslación vertical es **hacia arriba.**
> - Si $\boldsymbol{p < 0}$, la traslación vertical es **hacia abajo.**

- **Traslación horizontal:** $y = \dfrac{k}{x+h}$



Las funciones del tipo $y = \dfrac{k}{x+h}$ son ***hipérbolas*** cuyo ***centro*** es el punto $\boldsymbol{C = (-h,\ 0)}$. Se obtienen trasladando horizontalmente $\boldsymbol{h}$ unidades la gráfica de $y = \dfrac{k}{x}$. • Si $\boldsymbol{h > 0}$, la traslación horizontal es **hacia la izquierda.** • Si $\boldsymbol{h < 0}$, la traslación horizontal es **hacia la derecha.**

- **Traslación oblicua:** $y = \dfrac{k}{x+h} + p$



Las funciones del tipo $y = \dfrac{k}{x+h} + p$ son ***hipérbolas*** cuyo ***centro*** es el punto $\boldsymbol{C = (-h,\ p)}$. Se obtienen trasladando verticalmente $\boldsymbol{p}$ unidades y horizontalmente $\boldsymbol{h}$ unidades la gráfica de $y = \dfrac{k}{x}$. El sentido de las traslaciones horizontales y verticales depende del signo de p y h respectivamente.

- Lo estudiado anteriormente nos permite deducir las propiedades de estas funciones.

La ***hipérbola*** de ecuación $y = \dfrac{k}{x+h} + p$ tiene las siguientes propiedades: • Su **dominio** es **Dom** $f = \mathbb{R} - \{-h\}$. • Su **imagen** es **Im** $f = \mathbb{R} - \{p\}$. • La función es **continua** en todo su dominio. • El ***centro de la hipérbola*** es el punto $\boldsymbol{C = (-h,\ p)}$ (la función es simétrica respecto de este punto). • Si $\boldsymbol{k > 0}$, la función es siempre **decreciente** en todo intervalo que no contenga a $x = -h$.

Si $\boldsymbol{k < 0}$**,** la función es siempre **creciente** en todo intervalo que no contenga a $x = -h$.

- No tiene máximos ni mínimos.
- Tiene por ***asíntota horizontal*** la recta de ecuación $\boldsymbol{y = p}$**.**
- Tiene por ***asíntota vertical*** la recta de ecuación $\boldsymbol{x = -h}$**.**

EJERCICIOS

8. Representa la hipérbola de ecuación $y = \dfrac{-2}{x}$. A partir de ella representa mediante traslaciones las siguientes, hallando previamente las asíntotas y centros de las mismas.
   a) $y = \dfrac{-2}{x} + 3$ b) $y = \dfrac{-2}{x+5}$ c) $y = \dfrac{-2}{x+5} + 3$
9. Representa la hipérbola de ecuación $y = \dfrac{9}{x}$. A partir de ella representa mediante traslaciones las siguientes, hallando previamente las asíntotas y centros de las mismas
   a) $y = \dfrac{9}{x} - 2$ b) $y = \dfrac{9}{x-4}$ c) $y = \dfrac{9}{x-4} - 2$
10. Escribe la ecuación de una hipérbola que tenga por asíntotas las rectas $x = 2$ e $y = 2$. ¿Puedes obtener más de una? Halla la ecuación de aquella que pasa por el punto de coordenadas (4, 5).

3. FUNCIONES RACIONALES

Una ***función racional*** es el cociente $\boldsymbol{y = \dfrac{p(x)}{q(x)}}$**,** donde $\boldsymbol{p(x)}$ y $\boldsymbol{q(x)}$ son polinomios con $\boldsymbol{q(x)}$ ¹ **0.** El **dominio** de estas funciones son todos los números reales excepto los valores de x que anulan al denominador.

Nota.- En este curso, nos centraremos en el estudio de aquellas funciones racionales en las que $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios de grado uno.

Ejemplo.- Halla el dominio de la función racional $y = \dfrac{4x+5}{2x-3}$

Resolviendo la ecuación $2x - 3 = 0$, obtenemos: $2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 2/3$

Por tanto, Dom $f = \mathbf{R} - \{2/3\}$

- Veamos cómo se puede construir la gráfica de la función $y = \dfrac{3x+5}{x+1}$ utilizando la traslación de hipérbolas.

Resolviendo la ecuación $x + 1 = 0$, obtenemos que Dom $f = \mathbf{R} - \{-1\}$

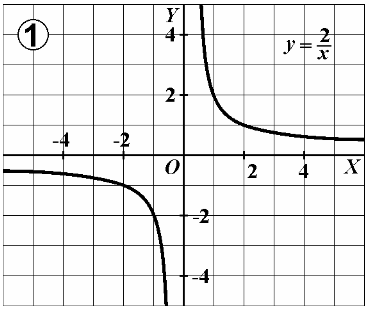
Dividimos el numerador entre el denominador:

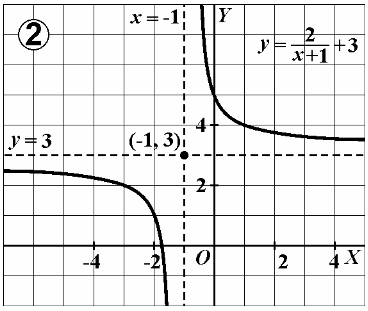
$$\begin{array}{r|l} 3x+5 & x+1 \\ \cline{2-2} -3x-3 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$$

El algoritmo de la división nos permite afirmar que: $3x + 5 = (x + 1) \cdot 3 + 2$

Dividiendo esta igualdad por el cociente obtenemos que: $\dfrac{3x+5}{x+1} = \dfrac{(x+1)\cdot 3}{x+1} + \dfrac{2}{x+1} \Leftrightarrow y = \dfrac{3x+5}{x+1} = 3 + \dfrac{2}{x+1}$

Así, la gráfica de $y = \frac{3x+5}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 3$ es la hipérbola obtenida al trasladar la función $y = \frac{2}{x}$ de modo de su centro sea el punto (–1, 3).





Observa que la asíntota horizontal es el cociente de dividir el numerador entre el denominador, y la asíntota vertical se obtiene en el valor de *x* que anula al denominador.

Las ***funciones racionales*** del tipo $\boldsymbol{y = \frac{ax+b}{cx+d}}$ se pueden expresar siempre de la forma $\boldsymbol{y = \frac{k}{x+h} + p}$.
Su representación gráfica es una ***hipérbola*** cuya ***asíntota horizontal*** es el cociente de dividir el numerador entre el denominador, y la ***asíntota vertical*** se obtiene en el valor de ***x*** que anula al denominador.

EJERCICIOS

11. Representa, mediante traslaciones, las siguientes funciones racionales.

a) $y = \frac{2x+1}{2x-4}$ b) $y = \frac{-x}{-x+1}$ c) $y = \frac{4x-2}{2x+1}$

3.1. Método de representación de hipérbolas

Podemos representar funciones racionales del tipo $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ mediante traslaciones, como anteriormente, o bien directamente siguiendo los pasos que a continuación se detallan:

1º. Se halla el dominio de la función: Dom $f = \{x \in \mathbf{R} / cx+d \neq 0\} = \mathbf{R} - \left\{\frac{-d}{c}\right\}$.

2º. Se determinan las asíntotas horizontales y verticales, y el centro de la hipérbola.

La asíntota horizontal es el cociente de dividir el numerador entre el denominador, y la asíntota vertical se obtiene en el valor de *x* que anula al denominador.

Asíntota horizontal: $y = \frac{a}{c}$; Asíntota vertical: $x = \frac{-d}{c}$; Centro: $C = \left(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c}\right)$

3º. Se calculan los puntos de corte con los ejes cartesianos.

Eje *Y*: $\begin{cases} y = \frac{ax+b}{cx+d} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, f(0)) = \left(0, \frac{b}{d}\right)$

Eje X: $\begin{cases} y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ resolvemos $\dfrac{ax+b}{cx+d} = 0 \Leftrightarrow ax+b=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a} \Rightarrow$ es el punto $\left(\dfrac{-b}{a}, 0\right)$

4º. Para finalizar, fijamos la hipérbola ayudándonos con una tabla de valores.

Ejemplo.- Estudia y representa la gráfica de la hipérbola de ecuación $y = \dfrac{x+2}{x-2}$

- Hallamos el dominio de la función resolviendo la ecuación $x - 2 = 0 \Rightarrow$ Dom f = **R** − {2}
- Determinamos las asíntotas y centro de la hipérbola:

$$\begin{array}{r|l} x+2 & x-2 \\ \cline{2-2} -x+2 & 1 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Asíntota horizontal: $y = 1$

Asíntota vertical: $x = 2$

Centro: (2, 1)

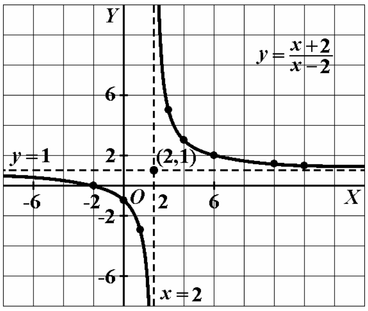
- Hallamos los puntos de corte con los ejes.

Para $x = 0$ obtenemos $y = -1$, luego la hipérbola corta al eje Y en el punto (0, −1).

Resolviendo la ecuación $\dfrac{x+2}{x-2} = 0$ obtenemos $x = -2$, luego en (−2, 0) corta la hipérbola al eje X.

- Construimos una tabla de valores y representamos la gráfica.

x	−8	−3	−2	0	1	3	4	6	7	10	12
y	0'6	0'2	0	−1	−3	5	3	2	1'8	1'5	1'4



EJERCICIOS

12. Representa las siguientes hipérbolas hallando previamente su dominio, asíntotas, centro y puntos de corte con los ejes de coordenadas.

a) $y = \dfrac{3x}{x+5}$ b) $y = \dfrac{3x-9}{x-2}$ c) $y = \dfrac{-6x+12}{2x+3}$ d) $y = \dfrac{4x+2}{2x-1}$

13. Halla la ecuación de una hipérbola $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ que tenga por centro el punto (−1, 3) y pase por (2, 4).

14. Las pérdidas y ganancias (y) de una empresa en función del tiempo (x) sigue una ley del tipo $y = \dfrac{2x-6}{x+1}$.

Ayudándote de la representación gráfica de esta función, determina:
a) Pérdidas que tuvo la empresa en su fundación.
b) El momento (valor de x) a partir del cual la empresa tendrá ganancias.
c) La ganancia máxima previsible en el futuro, si existe.
d) ¿Existirá algún momento futuro en el que las ganancias empiecen a disminuir?

15. La función que relaciona el número (y) de pulsaciones por minuto de una persona que está aprendiendo a teclear en un ordenador en función de las horas (x) empleadas es del siguiente tipo.

$$y = \frac{400x + 400}{x + 18}.$$

a) ¿Cuántas pulsaciones por minuto dará al cabo de 3, 5 y 20 horas?
b) ¿Cuántas horas debe practicar para dar 300 pulsaciones por minuto?
c) ¿Cuál es el número máximo de pulsaciones que puede dar si aumenta indefinidamente el número de horas?