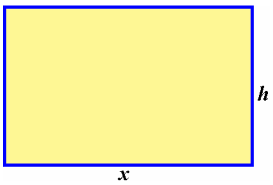
FUNCIONES CUADRÁTICAS. PARÁBOLAS

1. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Representemos, en función de la longitud de la base (x), el área (y) de todos los rectángulos de perímetro 12 metros. De ellos, ¿cuáles son las medidas del rectángulo que tiene mayor área?

Consideremos un rectángulo de base x y altura h:



Como el perímetro es 12 metros, se verifica:

$$2x + 2h = 12 \;\Rightarrow\; 2(x + h) = 12 \;\Rightarrow\; x + h = 6 \;\Rightarrow\; h = 6 - x$$

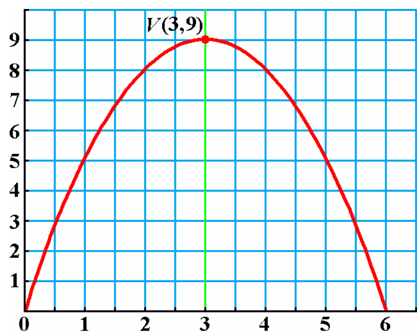
Por tanto, el área de dicho rectángulo es:

$$y = \text{base} \cdot \text{altura} = x \cdot h = x \cdot (6 - x) = 6x - x^2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y = 6x - x^2}$$

Formamos una tabla de valores para ver como varía el área, y, a medida que variamos la base x:

Base $\equiv x$	0'5	1	1'5	2	2'5	3	3'5	4	4'5	5	5'5
Área $\equiv y = 6x - x^2$	2'75	5	6'75	8	8'75	9	8'75	8	6'75	5	2'75

Dibujamos la gráfica correspondiente y obtenemos:



Por tanto, las medidas del rectángulo que tiene área máxima son $x = 3$ metros de base y $h = 6 - x = 3$ metros de altura, siendo 9 m^2 dicha área.

La función representada anteriormente $y = 6x - x^2$ se llama *función cuadrática* y su gráfica es una *parábola*.

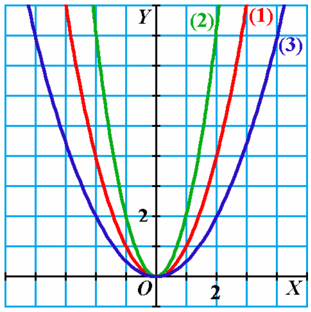
La recta de ecuación $x = 3$ es el *eje de la parábola* (la gráfica es simétrica respecto de esta recta) y el punto $V(3, 9)$ es el *vértice de la parábola*.

> Las ***funciones cuadráticas*** son aquellas cuya expresión es un polinomio de segundo grado, esto es, funciones de la forma $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$. Sus gráficas reciben el nombre de ***parábolas.***

2. LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DE ECUACIÓN $y = ax^2$

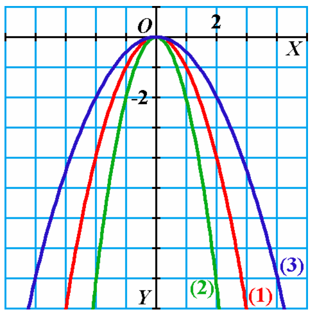
Vamos a representar las funciones (1) $y = x^2$, (2) $y = 2x^2$ y (3) $y = \frac{1}{2}x^2$, que son del tipo $\boldsymbol{y = ax^2}$, con $\boldsymbol{a > 0}$.

x	$y = x^2$	$y = 2x^2$	$y = \frac{1}{2}x^2$
–3	9	18	4’5
–2	4	8	2
–1	1	2	0’5
0	0	0	0
1	1	2	0’5
2	4	8	2
3	9	18	4’5



Si representamos ahora las funciones opuestas a las anteriores, (1) $y = -x^2$, (2) $y = -2x^2$ y (3) $y = -\frac{1}{2}x^2$, las tablas de valores de estas funciones son las mismas que antes, cambiando el signo a los valores de la variable y.

x	$y = -x^2$	$y = -2x^2$	$y = -\frac{1}{2}x^2$
–3	–9	–18	–4’5
–2	–4	–8	–2
–1	–1	–2	–0’5
0	0	0	0
1	–1	–2	–0’5
2	–4	–8	–2
3	–9	–18	–4’5



A la vista de las gráficas se deducen las propiedades de estas funciones.

La ***parábola*** de ecuación $\boldsymbol{y = ax^2}$ tiene las siguientes propiedades:

- Su **dominio** es el conjunto de los números reales: **Dom** $\boldsymbol{f} = \mathbb{R}$.
- Si $\boldsymbol{a > 0}$**,** la parábola está **abierta hacia arriba.**
  Si $\boldsymbol{a < 0}$**,** la parábola está **abierta hacia abajo.**
- La función es **continua.**
- Si $\boldsymbol{|\,a\,| > 1}$**,** la parábola es **más estrecha** que la $\boldsymbol{y = x^2}$**.**
  Si $\boldsymbol{|\,a\,| < 1}$**,** la parábola es **más ancha** que la $\boldsymbol{y = x^2}$**.**
- Es **simétrica respecto del eje de ordenadas** (simetría par) ya que $\boldsymbol{f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)}$**.**
  El eje de ordenadas Y (recta de ecuación $\boldsymbol{x = 0}$) es el ***eje de la parábola.***
- El punto $V = \boldsymbol{(0, 0)}$ es el ***vértice de la parábola.***
  Si $\boldsymbol{a > 0}$**,** la función tiene un **mínimo absoluto** en su vértice**,** siendo **Im** $\boldsymbol{f = [0, +\infty)}$**.**
  Si $\boldsymbol{a < 0}$**,** la función tiene un **máximo absoluto** en su vértice**,** siendo **Im** $\boldsymbol{f = (-\infty, 0]}$**.**
- Si $\boldsymbol{a > 0}$**,** la función es **decreciente** en $\boldsymbol{(-\infty, 0)}$ y **creciente** en $\boldsymbol{(0, +\infty)}$**.**
  Si $\boldsymbol{a < 0}$**,** la función es **creciente** en $\boldsymbol{(-\infty, 0)}$ y **decreciente** en $\boldsymbol{(0, +\infty)}$**.**

EJERCICIOS

1. Observa las ecuaciones de las siguientes funciones.

   a) $y = 3x^2$ b) $y = \frac{1}{3}x^2$ c) $y = -4x^2$ d) $y = -\frac{1}{4}x^2$

   a) ¿Qué parábolas están abiertas hacia arriba? ¿Y hacia abajo?
   b) ¿Qué parábolas son más anchas que $y = x^2$? ¿Y más estrechas?
   c) Representa sobre unos mismos ejes dichas parábolas, así como las parábolas de ecuación $y = x^2$ e $y = -x^2$.

2. Expresa el área de un triángulo equilátero en función del lado cuya medida es x. ¿Qué tipo de función se obtiene? Represéntala gráficamente.

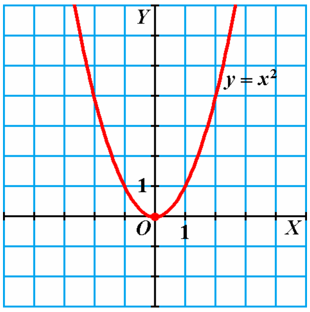
3. TRASLACIÓN DE PARÁBOLAS

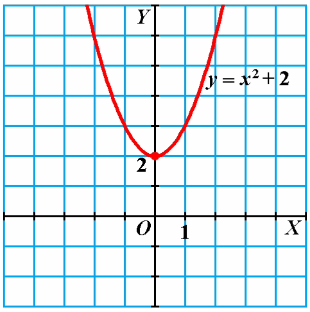
Las parábolas de ecuación $y = ax^2$ son las más sencillas. A partir de estas parábolas se obtienen otras por traslación.

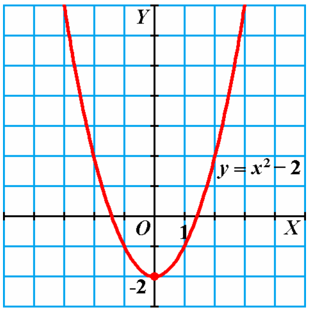
- **Traslación vertical: $y = ax^2 + p$**

  Observa que las tablas de $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 2$ se obtienen a partir de la tabla de $y = x^2$, sumando y restando 2 unidades respectivamente.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$y = x^2 + 2$	18	11	6	3	2	3	6	11	18
$y = x^2 - 2$	14	7	2	-1	-2	-1	2	7	14







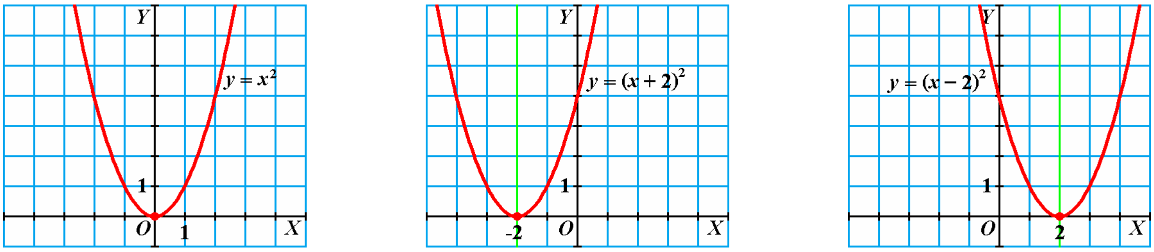
Las ***funciones cuadráticas*** del tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + p}$ son ***parábolas*** cuyo ***vértice*** es el punto $\boldsymbol{V = (0, p)}$. Se obtienen trasladando verticalmente $\boldsymbol{p}$ unidades la gráfica de $\boldsymbol{y = ax^2}$.

- Si $\boldsymbol{p > 0}$, la traslación vertical es **hacia arriba.**
- Si $\boldsymbol{p < 0}$, la traslación vertical es **hacia abajo.**

- **Traslación horizontal: $y = a(x + h)^2$**

  Observemos ahora las tablas y gráficas de las funciones $y = (x + 2)^2$ e $y = (x - 2)^2$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$y = (x + 2)^2$	4	1	0	1	4	9	16	25	36
$y = (x - 2)^2$	36	25	16	9	4	1	0	1	4



Las ***funciones cuadráticas*** del tipo $y = a(x + h)^2$ son ***parábolas*** cuyo ***vértice*** es el punto $V = (-h, 0)$. Se obtienen trasladando horizontalmente h unidades la gráfica de $y = ax^2$.

- Si $h > 0$, la traslación horizontal es **hacia la izquierda.**
- Si $h < 0$, la traslación horizontal es **hacia la derecha.**

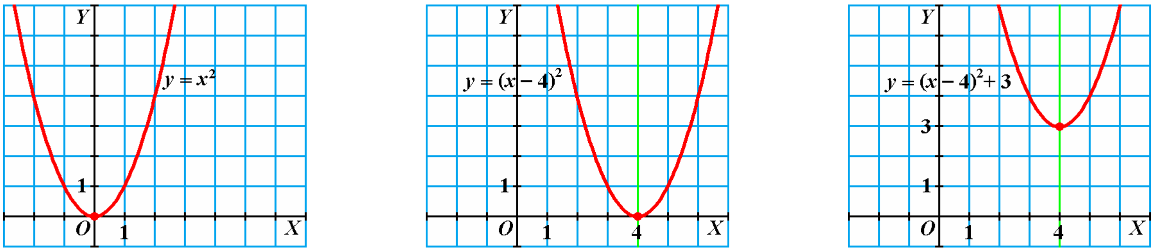
- **Traslación oblicua:** $y = a(x + h)^2 + p$

  Vamos a obtener la gráfica de la función cuadrática $y = (x - 4)^2 + 3$ partiendo de la gráfica de $y = x^2$. Para ello, realizamos sucesivamente una traslación horizontal y una traslación vertical.

  Trasladamos horizontalmente la parábola $y = x^2$ cuatro unidades a la derecha, obteniendo la parábola $y = (x - 4)^2$.

  Trasladamos ahora esta última tres unidades verticalmente hacia arriba, y obtenemos la parábola $y = (x - 4)^2 + 3$.

  Por consiguiente, la gráfica de $y = (x - 4)^2 + 3$ es igual que la gráfica de la parábola $y = x^2$, pero con su vértice en el punto de coordenadas (4, 3).



Las ***funciones cuadráticas*** del tipo $y = a(x + h)^2 + p$ son ***parábolas*** cuyo ***vértice*** es el punto de coordenadas $V = (-h, p)$. Se obtienen trasladando verticalmente p unidades y horizontalmente h unidades la gráfica de $y = ax^2$.

El sentido de las traslaciones horizontales y verticales depende del signo de p y h respectivamente.

Atención.- Las anteriores reglas sobre traslaciones se cumplen también para la gráfica de cualquier función $y = f(x)$. En general, $y = f(x) + p$ es una ***traslación vertical*** e $y = f(x + h)$ una ***traslación horizontal*** de la gráfica de la función $y = f(x)$.

EJERCICIOS

3. Halla el vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas.
   a) $y = 3(x - 1)^2 + 4$ b) $y = -4(x + 7)^2 - 1$ c) $y = 6(x - 12)^2 + 14$

4. A partir de la gráfica de la función $y = x^2$, obtén las gráficas de las siguientes funciones, explicando en cada caso cómo lo haces.
   a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x - 3)^2$ d) $y = (x + 1)^2$ e) $y = (x - 2)^2 + 3$ f) $y = (x + 2)^2 - 1$

5. Dibuja en una cuadrícula la gráfica de la función $y = 2x^2$ y a partir de ella obtén las siguientes gráficas.
   a) $y = 2x^2 - 3$ b) $y = 2(x + 3)^2$ c) $y = 2(x - 1)^2 + 1$ d) $y = 2(x + 1)^2 + 3$

4. LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DE ECUACIÓN $y = ax^2 + bx + c$

Vamos a estudiar la función cuadrática completa cuya ecuación es de la forma $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ con $\boldsymbol{a \neq 0}$.

- Estas funciones se pueden representar mediante traslaciones sin más que expresarlas de la forma $\boldsymbol{y = a(x + h)^2 + p}$.

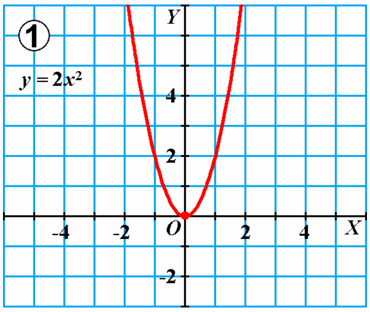
Ejemplo.- Representa gráficamente la parábola de ecuación $y = 2x^2 - 8x + 7$.

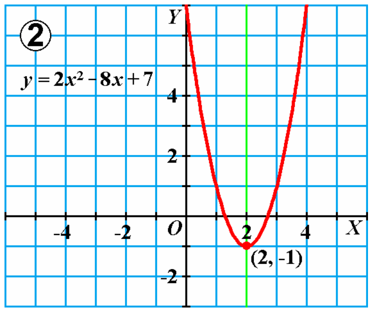
Sacamos factor común el término de x^2: $y = 2x^2 - 8x + 7 = 2(x^2 - 4x) + 7$

Desarrollamos el cuadrado de una diferencia: $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 2(x-2)^2 = 2x^2 - 8x + 8$

Ajustamos los términos: $y = 2x^2 - 8x + 7 = 2(x-2)^2 - 1$

Así, la gráfica de $y = 2x^2 - 8x + 7 = 2(x-2)^2 - 1$ es la parábola obtenida al trasladar la función $y = 2x^2$ de modo de su vértice sea el punto $(2, -1)$.





EJERCICIOS

6. Representa las siguientes parábolas, expresándolas previamente en la forma $y = a(x+h)^2 + p$.
   a) $y = x^2 - 6x$ b) $y = x^2 - 6x + 11$ c) $y = 3x^2 - 6x + 7$

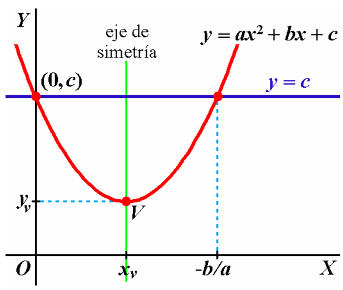
- Los elementos más importantes de una parábola son el vértice y el eje de simetría. Vamos, a continuación, a obtener las coordenadas $\boldsymbol{V = (x_v, y_v)}$ del vértice y la ecuación del eje de simetría de la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

Las coordenadas de los puntos en los que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ corta a la recta $y = c$ se obtienen resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = c \end{cases}$$

Igualando las ecuaciones y operando se obtiene:

$$ax^2 + bx + c = c \Rightarrow ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax+b) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \frac{-b}{2a}$$



La abscisa x_v es el punto medio de las abscisas halladas anteriormente: $x_v = \frac{0 + (-b/a)}{2} = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x_v = \frac{-b}{2a}}}$

La ordenada del vértice la obtenemos sustituyendo: $y_v = f(x_v) = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{y_v = \frac{4ac - b^2}{4a}}}$

El eje de simetría pasa por el vértice de la parábola. Por tanto, dicho eje es la recta de ecuación $\boxed{\boldsymbol{x = \frac{-b}{2a}}}$

- Lo estudiado anteriormente nos proporciona las propiedades de estas funciones.

> La ***parábola*** de ecuación $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ tiene las siguientes propiedades:
>
> - Su **dominio** es el conjunto de los números reales: **Dom f = R**.
> - Si $\boldsymbol{a > 0}$**,** la parábola está **abierta hacia arriba.**
>   Si $\boldsymbol{a < 0}$**,** la parábola está **abierta hacia abajo.**
> - La función es **continua.**
> - Si $\boldsymbol{|\ a\ | > 1}$**,** la parábola es **más estrecha** que la $\boldsymbol{y = x^2}$**.**
>   Si $\boldsymbol{|\ a\ | < 1}$**,** la parábola es **más ancha** que la $\boldsymbol{y = x^2}$**.**
> - El punto $\boldsymbol{V = (x_v, y_v)}$ es el ***vértice de la parábola.***
>   Si $\boldsymbol{a > 0}$**,** la función tiene un **mínimo absoluto** en su vértice, siendo **Im f = [y_v , +¥).**
>   Si $\boldsymbol{a < 0}$**,** la función tiene un **máximo absoluto** en su vértice, siendo **Im f = (- ¥, y_v].**
> - Si $\boldsymbol{a > 0}$**,** la función es **decreciente** en **(- ¥, x_v)** y **creciente** en **(x_v , +¥).**
>   Si $\boldsymbol{a < 0}$**,** la función es **creciente** en **(- ¥, x_v)** y **decreciente** en **(x_v , +¥).**
> - El ***eje de la parábola*** es la recta $\boldsymbol{x = \frac{-b}{2a}}$ (la función es simétrica respecto de este eje).

4.1. Método de representación de parábolas

Podemos representar parábolas de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ sin utilizar traslaciones. Para ello, procederemos de la siguiente forma:

1º. Se halla la orientación de la parábola según el signo de a.

2º. Se calculan las coordenadas del vértice.

3º. Se halla la ecuación del eje de simetría.

4º. Se calculan los puntos de corte con los ejes cartesianos.

$$\text{Eje } Y\text{:} \quad \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (0, f(0)) = (0, c)$$

$$\text{Eje } X\text{:} \quad \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{resolvemos la ecuación } \ ax^2 + bx + c = 0$$

Dependiendo de las soluciones de esta ecuación, se tendrá que:

- dos 2 soluciones: $x_1, x_2 \Rightarrow$ dos puntos de corte: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$
- una solución: $x_1 \Rightarrow$ un punto de corte $(x_1, 0)$
- ninguna solución $\Rightarrow$ la parábola no corta al eje X

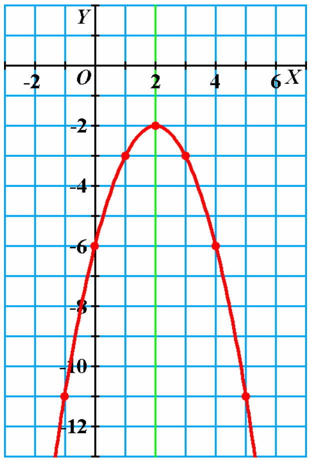
5º. Por último, construimos una tabla de valores hallando dos o más puntos simétricos respecto del eje de simetría.

<u>**Ejemplo.-**</u> Estudia y representa la gráfica de la parábola de ecuación $y = -x^2 + 4x - 6$.

- Como $a = -1 > 0$, la parábola está abierta hacia abajo.
- Calculamos las coordenadas del vértice.

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2\cdot(-1)} = 2 \\ y_v = f(2) = -2^2 + 4\cdot 2 - 6 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ V = (2,-2)$$

- El eje de simetría es la recta de ecuación $x = 2$.



- Hallamos los puntos de corte con los ejes.

  El punto de corte con el eje Y es $(0, f(0)) = (0, c) = (0, -6)$.

  Para hallar los puntos de corte con el eje X resolvemos la ecuación de segundo grado $-x^2 + 4x - 3 = 0$:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{-2}$$

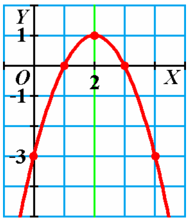
  La ecuación no posee soluciones, por tanto, la gráfica no corta al eje X.

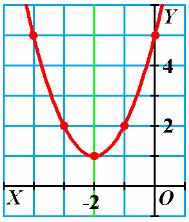
- Construimos una tabla de valores hallando puntos simétricos respecto del eje de simetría.

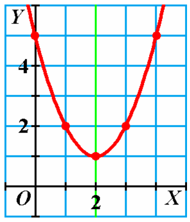
x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-11	-6	-3	-2	-3	-6	-11

EJERCICIOS

7. Asocia cada una de las siguientes expresiones algebraicas a su gráfica correspondiente, razonando las respuestas.
   a) $y = x^2 - 4x + 5$ b) $y = -x^2 + 4x - 3$ c) $y = x^2 + 4x + 5$







8. Determina el vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas. Compara los resultados obtenidos con los del ejercicio número seis.
   a) $y = x^2 - 6x$ b) $y = x^2 - 6x + 11$ c) $y = 3x^2 - 6x + 7$

9. Representa gráficamente cada una de las siguientes funciones, determinando previamente su vértice, eje de simetría y los puntos de corte con los ejes.
   a) $y = -x^2 + 4$ d) $y = -4x^2 - 12x - 9$
   b) $y = x^2 - 8x + 12$ e) $y = x^2 + 4x - 5$
   c) $y = 4x^2 + 8x$ f) $y = 3x^2 + 15x + 18$

10. Un granjero tiene 72 metros de valla para hacer un corral de gallinas de forma rectangular.
    a) Expresa el área del corral en función de la variación de uno de los lados y representa gráficamente la función.
    b) ¿Qué dimensiones debe tener el corral para que su superficie sea la máxima posible?
    c) ¿Qué superficie tiene el corral si uno de los lados mide 10 metros?
    d) El granjero ha construido un corral que tiene 315 m^2, ¿qué dimensiones tiene?

11. Determina los puntos en los que la recta $y = x + 3$ corta a la parábola $y = -x^2 - x + 6$. Una vez hallados, interpreta gráficamente el resultado.

12. Determina la función que proporciona el producto de dos números cuya suma vale 10 unidades. ¿Para qué números es máximo este producto?

13. Expresa la función cuadrática en cada unos de los siguientes casos.
    a) El coeficiente de x^2 vale -1 y la gráfica pasa por $(1, 0)$ y $(2, 1)$.
    b) Su expresión es de la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto $(1, 9)$.
    c) Pasa por los puntos $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 4)$.
    d) Pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene el vértice en $(-1, -1)$.
    e) Corta al eje Y en $(0, 3)$ y al eje X en $(1, 0)$ y $(3, 0)$

14. Al proyectar una diapositiva sobre una pantalla, el área de la imagen depende de la distancia del proyector a la pantalla, de tal manera que cuando la pantalla está a 1 metro del proyector la imagen mide 20 cm × 20 cm. ¿Cómo varía el área de la imagen cuando se aleja el proyector de la pantalla? Representa la función "distancia a la pantalla – área de la imagen".

15. Una avioneta vuela entre Cádiz y Ceuta. Su altura de vuelo viene dada por la ecuación $y = -30x^2 + 840x$, donde y es la altura de la avioneta en metros a los x minutos de haber despegado de Cádiz. Representa la gráfica para determinar la altura a la que la avioneta inicia el descenso y la duración del vuelo.

16. Se lanza un objeto hacia arriba desde una torre situada a 75 metros del suelo. Conocemos en cada instante de tiempo x (segundos) la altura sobre el suelo y (metros) del objeto mediante la función $y = -5x^2 + 10x + 75$. Representa la gráfica para determinar la altura máxima que alcanza el objeto, el tiempo que tarda en alcanzarla y el tiempo que tarda en caer al suelo el objeto desde su lanzamiento.

17. En el manual de instrucciones de un cañón de artillería podemos leer que la altura alcanzada en metros por el proyectil, y, está en función del espacio recorrido horizontalmente, x, según una ecuación del tipo $y = -0'005x^2 + 3x$.
    a) Representa gráficamente dicha función.
    b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil?
    c) ¿Cuál es el espacio recorrido por el proyectil hasta dar a un objetivo situado en tierra?