Solución Examen Cinemática 1º Bach
Nombre y Apellidos: ____________________

1. Dada la ecuación vectorial de la posición de una partícula $\vec{r}(t) = (\frac{t^2}{2} + 2t - 5)\,\vec{i} + (3t^2 - 4t - 1)\,\vec{j}$, halla en unidades S.I.

   a. la velocidad en función del tiempo, v (t)

   La expresión de la velocidad instantánea se obtiene derivando el vector de posición, $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$

   Por tanto, $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (t+2)\,\vec{i} + (6t-4)\,\vec{j}$ *m/s*

   b. la velocidad y su módulo a los 5 segundos

   Sustituyendo en la expresión obtenida anteriormente, $\vec{v}(5) = (5+2)\,\vec{i} + (6\cdot 5 - 4)\,\vec{j} = 7\,\vec{i} + 26\,\vec{j}$ *m/s*

   Para calcular el módulo, $|\vec{v}(5)| = \sqrt{7^2 + 26^2} = \sqrt{725} = \sqrt{25\cdot 29} = 5\sqrt{29}$ *m/s*

   c. la velocidad media entre t = 0 y t = 2 segundos

   De la definición de velocidad media, $\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(2) - \vec{r}(0)}{2-0}$

   Además, $\vec{r}(2) = (\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2 - 5)\,\vec{i} + (3\cdot 2^2 - 4\cdot 2 - 1)\vec{j} = \vec{i} + 3\vec{j}$ *y* $\vec{r}(0) = -5\,\vec{i} - j$

   Por tanto, $\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(2) - \vec{r}(0)}{2-0} = \frac{\vec{i} + 3\vec{j} - (-5\,\vec{i} - j\,)}{2} = \frac{6\vec{i} + 4\vec{j}}{2} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

   d. la aceleración y su módulo a los 3 segundos

   La expresión de la aceleración instantánea se obtiene derivando la velocidad, $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$

   Por tanto, $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i} + 6\vec{j}$ *m/s²*

   Como es una magnitud constante, su módulo no depende del tiempo, $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}$ *m/s²*

   e. la aceleración media entre t = 0 y t = 4 segundos

   De la definición de aceleración media, $\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(4) - \vec{v}(0)}{4-0}$

   Además, $\vec{v}(4) = (4+2)\,\vec{i} + (6\cdot 4 - 4)\,\vec{j} = 6\vec{i} + 20\vec{j}$ *m/s,* $\vec{v}(0) = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ *m/s*

   Por tanto, $\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(4) - \vec{v}(0)}{4-0} = \frac{6\vec{i} + 20\vec{j} - (2\vec{i} - 4\vec{j}\,)}{4} = \frac{4\vec{i} + 24j}{4} = \vec{i} + 6\,\vec{j}$ *m/s², que coincide con la aceleración instantánea por ser constante*

   f. la ecuación de la trayectoria suponiendo que $\vec{r}(t) = (\frac{t^2}{2} - 5)\,\vec{i} + (3t^2 - 1)\,\vec{j}$,

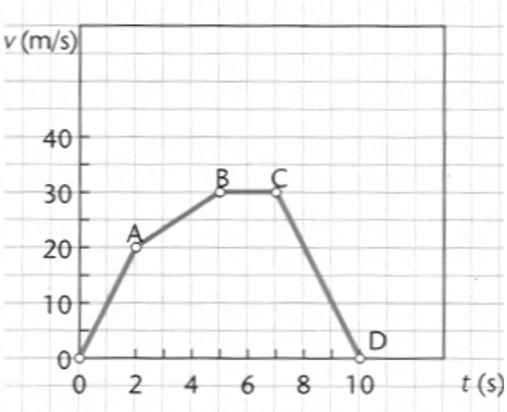
   Como $x = \frac{t^2}{2} - 5$ *,* $y = 3t^2 - 1$ *, si despejamos* t^2 *de la primera ecuación y sustituimos en la segunda,*

   $\frac{t^2}{2} = x + 5 \Rightarrow t^2 = 2x + 10$

$y = 3t\ 2 - 1 = 3\,(2x + 10) - 1 = 6x + 30 - 1 \Rightarrow y = 6x - 29$

g. ¿de qué tipo de movimiento se trata?

Como la ecuación de la trayectoria es una línea recta y la aceleración es constante, se trata de un movimiento rectilíneo uniforme



2. A la vista de la siguiente gráfica, calcula:

a. la aceleración en cada tramo

La ecuación de la aceleración media es, prescindiendo del carácter vectorial, $a_m = \dfrac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$

Aplicándola en cada uno de los tramos, obtenemos

Tramo OA $a_1 = \dfrac{v(2)-v(0)}{2-0} = \dfrac{20-0}{2} = 10\ m/s^2$

Tramo AB $a_2 = \dfrac{v(5)-v(2)}{5-2} = \dfrac{30-20}{3} = \dfrac{10}{3}\ m/s^2$

Tramo BC $a_3 = \dfrac{v(7)-v(5)}{7-5} = \dfrac{30-30}{2} = 0\ m/s^2$

Tramo CD $a_4 = \dfrac{v(10)-v(7)}{10-7} = \dfrac{0-30}{3} = -10\ m/s^2$

b. la ecuación de la velocidad en cada tramo

La ecuación de la velocidad entre dos intervalos t y t_0, con sus respectivas velocidades, v y v_0 es $v = v_0 + a\,(t - t_0)$ Aplicándola en cada uno de los tramos, tenemos que

Tramo OA $v = 10\,t\ \ m/s$

Tramo AB $v = 20 + \dfrac{10}{3}(t-2)\ \ m/s$

Tramo BC $v = 30\ m/s$

Tramo CD $v = 30 - 10\,(t - 7)\ \ m/s$

c. la ecuación del espacio recorrido en cada uno de los tramos suponiendo que se trata de un movimiento rectilíneo con el espacio inicial $s_0 = 0$

La ecuación general del espacio recorrido es $s = s_0 + v_0(t-t_0) + \dfrac{a(t-t_0)^2}{2}$

Aplicándola a cada uno de los tramos, tenemos que

Tramo OA $s = \dfrac{10t^2}{2} \Rightarrow s = 5t^2\ \ m$

Tramo AB *Teniendo en cuenta que el espacio recorrido en el primer tramo es $s = 5 \cdot 2^2 = 20$ m, y que éste es ahora el espacio inicial recorrido en el siguiente tramo,*

$$s = 20 + 20(t-2) + \frac{10(t-2)^2}{3 \cdot 2} \Rightarrow s = 20 + 20(t-2) + \frac{5(t-2)^2}{3}\ \ m$$

Tramo BC *Teniendo en cuenta que el espacio recorrido en el segundo tramo es*

$$s = 20 + 20(5-2) + \frac{5(5-2)^2}{3} = 20 + 60 + 15\ m = 95\ m\ , \qquad s = 95 + 30\,(t-5)\ m$$

Tramo CD *Teniendo en cuenta que el espacio recorrido en el tercer tramo es $s = 95 + 30\,(7-5) = 155$ m,*

$$s = 155 + 30(t-7) - \frac{10(t-7)^2}{2}\ , \qquad s = 155 + 30\,(t-7) - 5\,(t-7)^2\ \ m$$

d. el espacio total recorrido a los 2, 5, 8 y 10 segundos

Hay que tener en cuenta en qué intervalo se encuentra cada uno de los instantes de tiempo anteriores, y usar la ecuación correspondiente.

Para t = 2 s usaremos la ecuación del tramo OA, para t = 5 s usaremos la del tramo AB, para t = 8 s usaremos la del BC y para t = 10 s la del tramo CD.

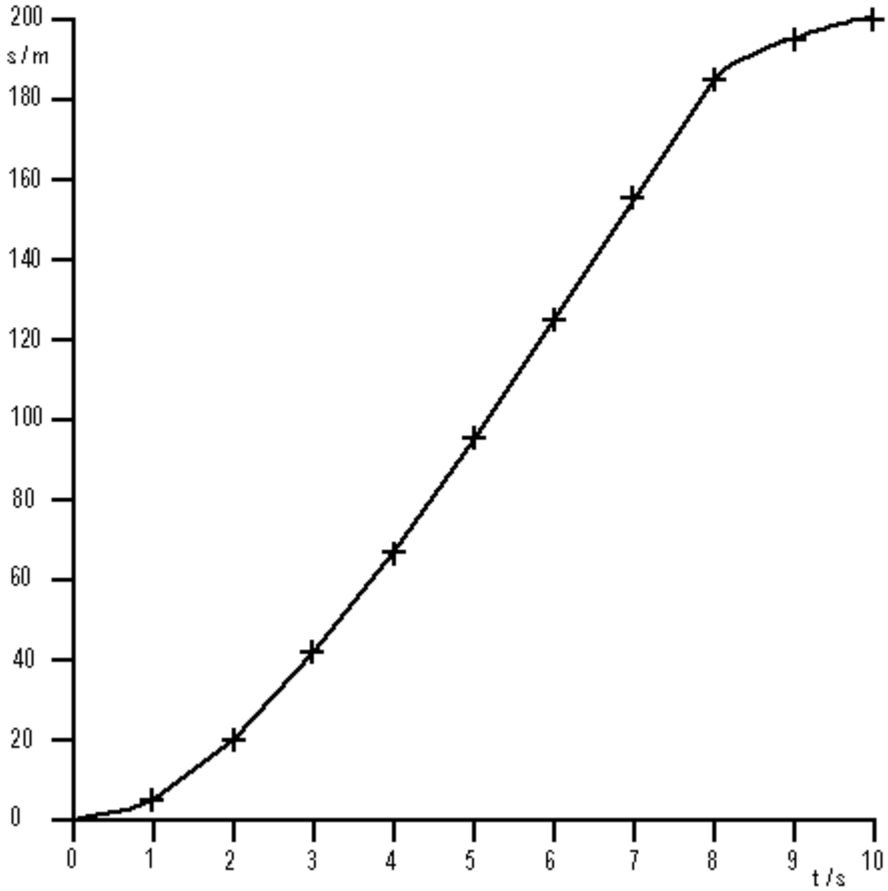
$t = 2\ s \qquad s = 5\ t^2 = 20\ m$

$t = 5\ s \qquad s = 20 + 20(5-2) + \frac{5(5-2)^2}{3} = 20 + 60 + 15 = 95\ m$

$t = 8\ s \qquad s = 155 + 30\ (8 - 7) - 5\ (8 - 7)^2 = 180\ m$

$t = 10\ s \qquad s = 155 + 30\ (10 - 7) - 5\ (10 - 7)^2 = 155 + 90 - 45 = 200\ m$

e. la gráfica s frente a t



3. Sabiendo que el radio terrestre es de 6378 km y su período de 23 horas 56 minutos 4 segundos, calcula:
   a. su velocidad angular

   Sabemos que la velocidad angular es el cociente entre el ángulo girado y el tiempo empleado en hacerlo, $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

   En nuestro caso, al tratarse de una vuelta completa de La Tierra, $\Delta\varphi = 2\pi$ *rad*

   Como el tiempo que tarda en dar una vuelta completa es $\Delta t = 23\ h\ 56\ m\ 4\ s = 23 \cdot 3600 + 56 \cdot 60 + 4\ s = 86164\ s$

Sustituyendo en la expresión de la velocidad angular, $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{86164}\frac{rad}{s} = 7{,}29 \times 10^{-5}\ rad / s$

b. la velocidad lineal de un objeto situado en el ecuador

La relación entre la velocidad lineal y la angular es $v = \omega \cdot R$ *y como en nuestro caso el radio de giro es el de La tierra,* $R = 6378\ km = 6{,}378 \times 10^{6}\ m$

Sustituyendo en la expresión correspondiente se obtiene que $v = \omega \cdot R = 7{,}29 \times 10^{-5}\ rad / s \times 6{,}378 \times 10^{6}\ m \Rightarrow$

$v = 465{,}09\ m / s \cong 1674\ km / h$

c. la aceleración normal

Sabemos que la expresión que permite calcular la aceleración normal es $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$

Por tanto, sustituyendo en la expresión anterior, $a_n = (7{,}29 \times 10^{-5}\ rad / s)^2 \cdot 6{,}378 \times 10^{6}\ m = 33{,}9 \times 10^{-3}\ m / s^2$

Es decir, $a_n = 33{,}9 \times 10^{-3}\ m / s^2 \cong 34\ mm / s^2$

4. Calcula la velocidad lineal a la que se desplaza un ciclista si sus ruedas, de 90 cm de diámetro, dan 36 vueltas cada 10 segundos

La relación entre la velocidad lineal y la angular es $v = \omega \cdot R$. *Por tanto, debemos calcular primero la velocidad angular, ya que el radio de giro es el de la rueda. Como el diámetro es 90 cm, el radio será 45 cm = 0,45 m*

Sabemos que la velocidad angular es el cociente entre el ángulo girado y el tiempo empleado en hacerlo, $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

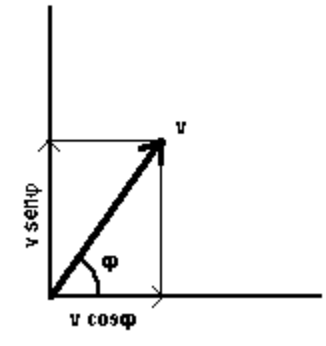
Por tanto, 36 vueltas es equivalente a $\Delta\varphi = 36 \cdot 2\pi\ rad = 72\pi\ rad$*, que da en 10 s*

Sustituyendo en la expresión $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{72\pi\ rad}{10\ s} = \frac{36\pi}{5}\frac{rad}{s}$

Finalmente, usando la expresión $v = \omega \cdot R = \frac{36\pi}{5}\frac{rad}{s} \cdot \frac{45}{100}m = \frac{36 \cdot 9}{100}\pi\frac{m}{s} = 3{,}24\pi\frac{m}{s} \cong 10{,}18\ m / s \cong 37\ km / h$

5. ¿Por qué se consigue en el tiro parabólico que el alcance máximo sea cuando el ángulo de lanzamiento es de 45º?

Ya sabemos que las coordenadas de una partícula que describe un movimiento parabólico son



$x = v_0 \cos\varphi\, t$

$y = v_0\, sen\varphi\, t - \frac{gt^2}{2} = (v_0\, sen\varphi - \frac{gt}{2})t$

Si hacemos que la coordenada y (altura) sea 0, obtenemos dos posibles valores del tiempo

<u>y = 0</u> $\Rightarrow t = 0$ *(instante inicial)*

$\Rightarrow v_0\, sen\varphi - \frac{gt}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0 sen\varphi}{g}$ *(instante final)*

Por tanto, el alcance del tiro parabólico se obtiene sustituyendo el valor obtenido para t (instante final) en la ecuación de la coordenada x

$$x = v_0 \cos\varphi \frac{2v_0 sen\varphi}{g} = \frac{v_0^2\, 2sen\varphi\cos\varphi}{g} = \frac{v_0^2 sen2\varphi}{g}$$

El valor de esta expresión es máximo cuando lo único que se puede variar (suponiendo un mismo cañón, no cambiará la velocidad inicial ni la gravedad), que es la función trigonométrica, sen 2φ, obtenga su valor máximo

$$sen\, 2\varphi = 1 \Rightarrow 2\varphi = 90º \Rightarrow \varphi = 45º$$

6. Con velocidad de 250 m/s y ángulo de lanzamiento de 30º se lanza un proyectil. Se pide
   a. el alcance máximo en la horizontal

En el problema anterior hemos deducido la expresión que permite calcular el alcance máximo $x = \dfrac{v_0^2 sen 2\varphi}{g}$

Sustituyendo los valores planteados $x = \dfrac{v_0^2 sen 2\varphi}{g} = \dfrac{(250\, m/s)^2 sen 60º}{9{,}8\, m/s^2} = 5523\, m$

   b. si en la mitad de su camino existe una colina de 1000 m de altura, ¿choca con ella?

Lo primero que hay que hacer es obtener una expresión que nos permita calcular el tiempo que tarda el objeto en llegar al punto más alto de la trayectoria, para luego sustituirlo en la ecuación que nos da la coordenada y (altura). Sabemos que en el punto más alto de la trayectoria, la velocidad en el eje y es nula

Como $v_y = v_0 sen\varphi - g\, t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{v_0 sen\varphi}{g}$ *, tiempo que coincide con la mitad del tiempo total de vuelo*

Sustituyendo ahora este tiempo en la ecuación de la altura,

$$y = v_0\, sen\varphi\, t - \frac{gt^2}{2} = v_0\, sen\varphi \frac{v_0 sen\varphi}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 sen\varphi}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 sen\varphi^2}{g} - \frac{g\, v_0^2 sen\varphi^2}{2g^2} = \frac{v_0^2 sen\varphi^2}{g} - \frac{v_0^2 sen\varphi^2}{2g} = \frac{v_0^2 sen\varphi^2}{2g}$$

Y sustituyendo los valores que tenemos $y = \dfrac{v_0^2 sen\varphi^2}{2g} = \dfrac{(250\, m/s)^2 (sen 30º)^2}{2 \cdot 9{,}8\, m/s^2} \cong 797\, m$

Como la colina mide 1000 m y la altura máxima alcanzada es 797 m, significa que el proyectil chocará con ella

   c. En caso afirmativo, ¿cómo podríamos llegar con el proyectil al blanco primitivo disparando desde el mismo sitio y con el mismo cañón?

Como se trata de llegar al mismo sitio y con el mismo cañón, la velocidad inicial del cañón no variará, ni tampoco la gravedad. Por tanto, lo único que podemos variar es el ángulo de lanzamiento. Sabiendo que el ángulo complementario de 30º es 60º, esto significa que sen 30º = cos 60º y que sen 60º = cos 30º

Como $x = \dfrac{v_0^2\, 2 sen\varphi \cos\varphi}{g}$ *, cuando lanzamos con un ángulo de 30º* $x = \dfrac{v_0^2\, 2\, sen 30º \cos 30º}{g}$

mientras que si cambiamos el ángulo por su complementario, es decir, 60º, la expresión no cambia $x = \dfrac{v_0^2\, 2\, sen 60º \cos 60º}{g}$ *, por lo que el proyectil llegará al mismo sitio.*

Sin embargo, la altura máxima ahora será $y = \dfrac{v_0^2 sen\varphi^2}{2g} = \dfrac{(250\, m/s)^2 (sen 60º)^2}{2 \cdot 9{,}8\, m/s^2} \cong 2392\, m$

Lo cual significa que supera la colina y alcanza el objetivo

7. Desde lo alto del Empire State Building, de 381 m, se lanza verticalmente y hacia abajo una pelota de tenis, con velocidad de 5 m/s. Calcula:
   a. La velocidad con que llega al suelo

Como $v^2 = v_0^2 + 2\, g\, h \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2\, g\, h} = \sqrt{(5m/s)^2 + 2 \cdot 9{,}8\, m/s^2 \cdot 381m} \cong 87\, m/s \cong 312\, km/h$

b. El tiempo que tarda en llegar

Como $v = v_0 + gt \Rightarrow t = \dfrac{v - v_0}{g} \Rightarrow t = \dfrac{(86{,}56 - 5)\,m/s}{9{,}8\,m/s^2} = 8{,}32\,s$

c. la distancia al suelo, a los 5 segundos

El espacio recorrido en 5 s es $s = v_0 t + \dfrac{gt^2}{2} = 5\,m/s \cdot 5\,s + \dfrac{9{,}8\,m/s^2 \cdot (5s)^2}{2} = 147{,}5\,m$

Esta distancia es la recorrida por la pelota a partir del lanzamiento. Como la altura del edificio es de 381 m, la distancia al suelo a los 5 s del lanzamiento será h = 381 m – 147,5 m = 233,5 m