

SOLUCIONES**Examen de Matemáticas (3º E.S.O)****UNIDAD 3: PROGRESIONES**

Fecha: 27-11-2009

Notas:

- 1) El examen ha de hacerse limpio, ordenado y sin faltas de ortografía.
- 2) El examen ha de realizarse en bolígrafo, evitando tachones en la medida de lo posible.
- 3) Debe aparecer todas las operaciones, no vale con indicar el resultado.
- 4) Los problemas deben contener: Datos, Planteamiento y Resolución, respondiendo a lo que se pregunte, no vale con indicar un número como solución del problema.

1.

a) Calcula los cinco primeros términos de las sucesiones: (0.5p)

a.1) $a_n = 1 - n^2$

a.2)
$$\begin{cases} b_1 = 10 \\ b_n = b_{n-1} + n \end{cases}$$

b) Halla el término general de las sucesiones: (1.5p)

b.1) 2, 2'1, 2'2, 2'3, ...

b.2) -3, 6, -12, 24, ...

b.3) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

Solución:

a)

a.1) $a_1 = 0, a_2 = -3, a_3 = -8, a_4 = -15, a_5 = -24$

a.2) $b_1 = 10, b_2 = 12, b_3 = 15, b_4 = 19, b_5 = 24$

b)

b.1) Es una progresión aritmética con $a_1 = 2$ y $d = 0'1$. Por tanto:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 2 + (n - 1) \cdot 0'1 = 2 + 0'1n - 0'1 = 0'1n + 1'9 \rightarrow a_n = 0'1n + 1'9$$

b.2) Es una progresión geométrica con $a_1 = -3$ y $r = -2$. Por tanto:

$$a_n = (-3) \cdot (-2)^{n-1}$$

2. El quinto término de una progresión aritmética vale -7, y la diferencia es -3. Calcula el primer término y la suma de los 12 primeros términos. (1p)

Solución:

$$a_5 = a_1 + 4d \rightarrow -7 = a_1 + 4 \cdot (-3) \rightarrow -7 = a_1 - 12 \rightarrow a_1 = 12 - 7 = 5 \rightarrow a_1 = 5$$

$$a_{12} = a_1 + 11d = 5 + 11 \cdot (-3) = 5 - 33 = -28$$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(5 - 28) \cdot 12}{2} = -138$$

3. En una progresión geométrica, $a_1 = 3$ y $a_4 = 24$. Calcula la razón y la suma de los ocho primeros términos. (1p)

Solución:

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow 24 = 3 \cdot r^3 \rightarrow 8 = r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow r = 2$$

$$a_8 = a_1 \cdot r^7 = 3 \cdot 2^7 = 3 \cdot 128 = 384$$

$$S_8 = \frac{a_8 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{384 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 765$$

4. La razón de una progresión geométrica es $\frac{3}{4}$ y el segundo término vale 2. Halla la suma de los infinitos términos de la progresión. (1p)

Solución:

$$a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow 2 = a_1 \cdot \frac{3}{4} \rightarrow 8 = a_1 \cdot 3 \rightarrow a_1 = \frac{8}{3}$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{\frac{8}{3}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{32}{3}$$

5. En una urbanización realizaron la instalación del gas natural en el año 1999. Consideramos que en ese momento se hizo la primera revisión. Sabiendo que las revisiones sucesivas se realizan cada 3 años, responde: (1.5p)

a) ¿En qué año se realizará la décima revisión?

b) ¿Cuál es el número de revisión que se realizará en el año 2035?

Solución:

Se trata de una progresión aritmética con $a_1 = 1999$ y $d = 3$.

a) $a_{10} = a_1 + 9d = 1999 + 27 = 2026 \rightarrow$ En el año 2026 se realizará la décima revisión.

b) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$$2035 = 1999 + (n - 1) \cdot 3$$

$$36 = (n - 1) \cdot 3$$

$$12 = n - 1 \rightarrow n = 13 \rightarrow$$
 En el año 2035 se realizará la revisión número 13.

6. Una máquina costó inicialmente 10480 €. Al cabo de unos años se vendió a la mitad de su precio. Pasados unos años, volvió a venderse por la mitad, y así sucesivamente. (1.5p)

a) ¿Cuánto le costó la máquina al quinto propietario?

b) Si el total de propietarios ha sido 7, ¿cuál es la suma total pagada por esa máquina?

Solución:

Es una progresión geométrica con $a_1 = 10\,480$ y $r = \frac{1}{2}$.

$$a) a_5 = a_1 \cdot r^4 = 10\,480 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 10\,480 \cdot \frac{1}{16} = \frac{10\,480}{16} = 655 \text{ euros}$$

$$b) a_7 = a_1 \cdot r^6 = 10\,480 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 10\,480 \cdot \frac{1}{64} = \frac{10\,480}{64} = 163,75 \text{ euros}$$

$$S_7 = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{163,75 \cdot \frac{1}{2} - 10\,480}{\frac{1}{2} - 1} = 20\,796,25 \text{ €}$$

Entre los 7 propietarios han pagado por la máquina un total de 20796,25 euros.

7. ¿Es $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ la ley de recurrencia de la sucesión $-1, 2, 1, 3, 5, \dots$? ¿Por qué? (0.75p)

Solución:

A simple vista para que sí, pero si comprobamos uno a uno si los cinco términos de la sucesión dada cumplen la ley de recurrencia:

$$a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = a_2 + a_1 = 2 - 1 = 1, a_4 = a_3 + a_2 = 1 + 2 = 3, a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 1 = 4 \neq 5$$

no encontramos con que el quinto término no la cumple.

Por tanto, a la sucesión dada no le corresponde dicha ley de recurrencia.

8. En una progresión aritmética sabemos que $a_1 = -3$ y que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$. Calcula la diferencia. (1.25p)

Solución:

Expresamos a_2, a_3, a_4 en función de a_1 y d :

$$a_2 = a_1 + d = -3 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d = -3 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + 3d = -3 + 3d$$

Entonces:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \rightarrow -3 - 3 + d - 3 + 2d - 3 + 3d = 0 \rightarrow -12 + 6d = 0 \rightarrow 6d = 12 \rightarrow d = 2$$