28 **Una rueda que gira a 1 200 r.p.m. se detiene transcurridos 10 s desde que comenzó a actuar de forma constante un freno. Calcula:**

a) La aceleración angular de frenado.

b) El número de vueltas que describe el volante hasta que se detiene.

c) El instante en que su velocidad angular es 8 rad/s.

La velocidad angular incial de la rueda, en unidades del Sistema Internacional es:

$$\omega_0 = 1200 \text{ r.p.m.} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 40 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

a) La aceleración angular de frenado resulta:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} \rightarrow \alpha = \frac{0 - 40 \cdot \pi}{10} = -4 \cdot \pi \text{ rad/s}^2$$

El signo negativo indica que la aceleración se opone al movimiento, lo que obliga a la rueda a detenerse.

b) Para obtener el número de vueltas que describe el volante durante el tiempo que actúa el freno, aplicamos la ecuación de la posición angular en el movimiento circular uniformemente acelerado:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$\theta = 0 + 40 \cdot \pi \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 200 \cdot \pi \text{ rad}$$

Esta es la distancia angular que recorre la rueda mientras frena. Si lo expresamos en número de vueltas, obtenemos:

$$\theta = 200 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{2 \cdot \pi \text{ rad}} = 100 \text{ vueltas}$$

c) El instante pedido lo obtenemos por medio de la expresión de la velocidad angular:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \rightarrow t = \frac{8 - 40 \cdot \pi}{-4 \cdot \pi} = 9{,}36 \text{ s}$$

33. Lanzamos un objeto hacia arriba con una velocidad inicial de 100 m · s^{-1}. Transcurridos 10 segundos, dejamos caer, sin velocidad inicial, un segundo objeto, que se encuentra inicialmente a 200 m de altura.

a) ¿A qué altura del suelo se cruzan?

b) ¿Qué velocidad posee cada objeto en ese instante?

c) ¿En qué sentido se mueve cada uno?

La actividad que se propone ahora es similar a la planteada en el problema 30, aunque con una diferencia: los instantes en que se lanzan los dos objetos no coinciden.

Para resolver el problema, escribimos, en primer lugar, las ecuaciones que permiten calcular la posición en cada uno de los dos movimientos:

$$y_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow y_1 = 100 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2$$

$$y_2 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - 10)^2 \rightarrow y_2 = 200 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot (t - 10)^2$$

Al cruzarse los dos objetos, la posición (y) en que se encuentran es la misma. Por tanto, igualando las dos expresiones anteriores, calculamos el instante, t, en que ello ocurre:

$$100 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 = 200 - 4{,}9 \cdot (t - 10)^2$$

$$100 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 = 200 - 4{,}9 \cdot t^2 + 98 \cdot t - 490$$

$$2 \cdot t = -290 \rightarrow t = -145 \text{ s}$$

El resultado que obtenemos ($t < 0$) es absurdo. ¿Qué ocurre en el problema? Para contestar a esa pregunta, deberemos analizar con detalle el movimiento de cada uno de los dos objetos.

Calculemos la velocidad con que se mueve el primer objeto (lanzado con una velocidad de 100 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) cuando han transcurrido 10 s desde que fue lanzado y la posición en que se encuentra en ese instante:

$$v_1 = v_0 - g \cdot t = 100 - 9{,}8 \cdot 10 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$y_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 100 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 10^2 = 510 \text{ m}$$

El resultado nos indica que el objeto está a punto de detener su movimiento a una altura mucho mayor que aquella a la que se encuentra el segundo objeto, y todavía está subiendo. Por tanto, si en ese instante dejamos caer el segundo objeto desde una altura de 200 m, el primero, que iniciará una caída libre desde un punto situado más arriba, jamás alcanzará al segundo, ya que el movimiento de ambos es de caída libre y el segundo está mucho más cerca del suelo que el primero cuando ambos están en movimiento.

Por tanto, el único instante en que se han cruzado los dos objetos es cuando el primero subía con cierta velocidad y el segundo estaba todavía en reposo en la posición $y = 200$ m.

La posición en que se encuentra el segundo objeto cuando se cruzan es 200 m y su velocidad es nula ($v = 0$). En cuanto al sentido de su movimiento, está claro que es "ninguno". Por lo que se refiere al primer objeto, su posición también es 200 m y el sentido del movimiento, ascendente. Para determinar la velocidad con que se mueve, debemos resolver el sistema obtenido al sustituir los datos que conocemos en las ecuaciones del movimiento. De este modo, el tiempo que tarda en llegar a esa altura resulta:

$$y_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow 200 = 100 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2$$

$$4{,}9 \cdot t^2 - 100 \cdot t + 200 = 0 \rightarrow t = 2{,}25 \text{ s}$$

Y, por tanto, su velocidad en ese instante es:

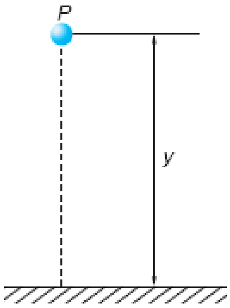
$$v_1 = v_0 - g \cdot t = 100 - 9{,}8 \cdot t \rightarrow v_1 = 100 - 9{,}8 \cdot 2{,}25 = 78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Observa, una vez más, que no debemos aplicar las ecuaciones matemáticas a situaciones físicas sin reflexionar antes sobre la validez de nuestro trabajo. Es muy importante que eso lo tengamos siempre en cuenta.

34 **Desde un mismo punto se lanzan verticalmente hacia arriba, con un intervalo de 2 s, dos objetos *A* y *B* con velocidades respectivas de 50 m/s y 80 m/s. Calcula el tiempo que tardan en encontrarse, la altura a la que lo hacen y la velocidad de cada uno cuando se encuentran.**

Se trata de dos lanzamientos verticales efectuados con un retardo de 2 segundos. Por tanto, cuando el segundo objeto lleva t segundos en movimiento, para el primero habrán transcurrido $t + 2$ segundos.

Si tomamos como origen del sistema de referencia el suelo y llamamos P al punto en que se encuentran, las ecuaciones del movimiento de ambos cuerpos son:



A: $$y = 50 \cdot (t + 2) - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot (t + 2)^2$$

$$y = 80{,}4 + 30{,}4 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \qquad [1]$$

B: $$y = 80 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2$$

$$y = 80 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \qquad [2]$$

Igualando los segundos miembros de las ecuaciones [1] y [2], obtenemos el instante en que se encuentran:

$$80{,}4 + 30{,}4 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 = 80 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

$$49{,}6 \cdot t = 80{,}4 \rightarrow t = 1{,}62 \text{ s}$$

La altura la obtenemos a partir de la ecuación [2]:

$$y = 80 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \rightarrow y = 80 \cdot 1{,}62 - 4{,}9 \cdot 1{,}62^2 = 116{,}74 \text{ m}$$

Las velocidades de cada cuerpo en ese instante son:

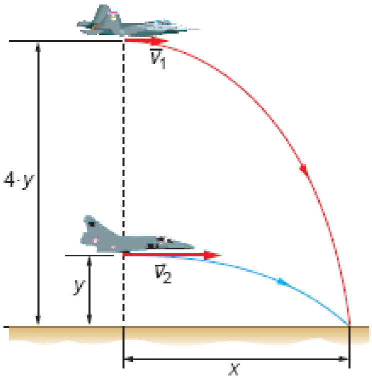
$$A\text{: } v_A = 50 - 9{,}8 \cdot t = 50 - 9{,}8 \cdot 1{,}62 = 34{,}12 \text{ m/s}$$

$$B\text{: } v_B = 80 - 9{,}8 \cdot t = 80 - 9{,}8 \cdot 1{,}62 = 64{,}12 \text{ m/s}$$

NOTA: La resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM del alumnado.

36 **En cierto instante, dos aviones militares, que realizan maniobras de bombardeo, vuelan horizontalmente situados en la misma vertical, siendo la altura de vuelo del situado a más altura cuatro veces superior a la del otro. Si el situado por encima lleva una velocidad de 580 km/h, ¿cuál debe ser la velocidad con que debe desplazarse el otro avión para que ambos alcancen el mismo objetivo?**

Los dos aviones efectúan, al bombardear, sendos lanzamientos horizontales, de trayectorias:



$$1: \quad \left.\begin{array}{l} x = v_1 \cdot t_1 \\ 4 \cdot y = \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \end{array}\right\} \; x^2 = v_1^2 \cdot \frac{8 \cdot y}{g}$$

$$2: \quad \left.\begin{array}{l} x = v_2 \cdot t_2 \\ y = \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \end{array}\right\} \; x^2 = v_2^2 \cdot \frac{2 \cdot y}{g}$$

Igualando los segundos miembros de ambas:

$$v_1^2 \cdot \frac{8 \cdot y}{g} = v_2^2 \cdot \frac{2 \cdot y}{g} \rightarrow v_1^2 = \frac{v_2^2}{4}$$

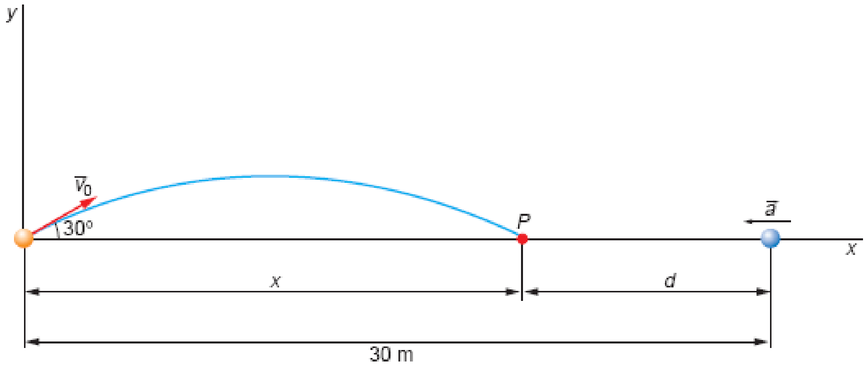
$$v_2 = 2 \cdot v_1 = 2 \cdot 580 = 1\,160 \text{ km/h}$$

Como vemos, el avión que vuela a una cuarta parte de la altura a la que vuela el otro avión debe volar el doble de rápido para poder alcanzar el mismo objetivo.

37 **Un jugador lanza un balón siguiendo una trayectoria que forma un ángulo de 30° con la horizontal y con una velocidad de 14,4 m/s. Un segundo jugador, situado a una distancia de 30 m del primero, en la dirección y sentido del lanzamiento, echa a correr hacia el balón con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, para hacerse con él. ¿Qué aceleración debe llevar para alcanzar el balón justo en el instante en que este llega al suelo?**

Si situamos el origen del sistema de referencia en el primer jugador, este efectúa con el balón un lanzamiento parabólico con velocidad inicial positiva formando un ángulo de 30° con la horizontal, mientras que el segundo jugador realiza un m.r.u.a. con aceleración negativa y velocidad inicial nula.

La siguiente figura refleja la situación descrita en el problema:



La ecuación que describe el movimiento vertical del balón es la siguiente:

$$y = v_0 \cdot sen\,\theta \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Cuando el balón alcanza el punto P, donde debe recogerlo el otro jugador, se cumple $y = 0$, luego:

$$0 = v_0 \cdot sen\,\theta \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Despejando el tiempo resulta:

$$t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sen\,\theta}{g} \rightarrow t = \frac{2 \cdot 14{,}4 \cdot sen\,30°}{9{,}8} = 1{,}47 \text{ s}$$

En ese tiempo, el balón recorre la distancia horizontal:

$$x = v_0 \cdot cos\,\theta \cdot t$$

$$x = 14{,}4 \cdot cos\,30° \cdot 1{,}47 = 18{,}32 \text{ m}$$

La aceleración con la que debe correr el segundo jugador para llegar al punto P a tiempo de recoger el balón debe ser:

$$r = r_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$x = 30 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$a = 2 \cdot \frac{x - 30}{t^2} \rightarrow a = 2 \cdot \frac{18{,}32 - 30}{1{,}47^2} = -10{,}8 \text{ m/s}^2$$

Y debe recorrer una distancia:

$$d = 30 - x = 30 - 18{,}32 = 11{,}68 \text{ m}$$

38. Un albañil está trabajando en el tejado de una casa cuando, fortuitamente, le resbala el nivel, que cae deslizándose por el tejado con una aceleración constante e igual a 5 m · s^{-2}.

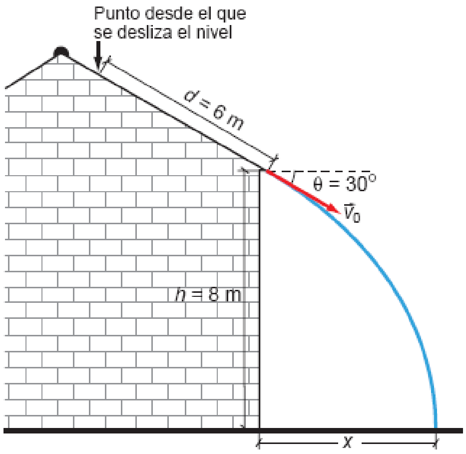
Con estos datos, calcula:

a) La velocidad, expresada en forma vectorial, con que sale despedido el nivel del tejado si recorre sobre él una distancia de 6 m.

b) El módulo de dicha velocidad.

c) La distancia a la que cae de la casa.

El extremo del tejado se encuentra a 8 m de altura y sobresale de la pared de la casa 25 cm.



a) El ejercicio aborda el movimiento parabólico. El sistema de referencia que utilizaremos tendrá por origen el borde del tejado de la casa, ya que es un punto desde el que es fácil medir.

La velocidad en el movimiento parabólico viene dada por las expresiones:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j}$$
$$\vec{v} = v_0 \cdot cos\,\theta \cdot \vec{i} + (v_0 \cdot sen\,\theta - g \cdot t) \cdot \vec{j}$$

En dichas expresiones desconocemos la velocidad inicial, v_0, con que sale despedido el martillo del techo de la casa. Para calcular dicho valor, utilizaremos las expresiones del m.r.u.a., pues el movimiento del martillo responde a estas características. De ese modo:

$$\Delta s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2 \rightarrow 6 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (t - t_0)^2 \rightarrow (t - t_0) = 1{,}55 \text{ s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_0 - v'_0}{t - t_0} \rightarrow v_0 = v'_0 + a \cdot (t - t_0) = 0 + 5 \cdot 1{,}55 = 7{,}75 \text{ m} \cdot s^{-1}$$

donde v'_0 representa la velocidad incial con que el nivel comienza a deslizar por el tejado de la casa.

Una vez calculada la velocidad v_0 con que sale despedido el martillo del techo de la casa, tan solo queda hallar las componentes de dicho vector al proyectarlo sobre los dos ejes del sistema de referencia. Observa que el ángulo que forma el martillo respecto al eje de abscisas es de –30°, pues está medido en sentido horario. Con estos datos, el resultado es:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_0 \cdot cos\,\theta \cdot \vec{i} + \vec{v}_0 \cdot sen\,\theta \cdot \vec{j} = (6{,}71 \cdot \vec{i} - 3{,}88 \cdot \vec{j}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) El módulo ya lo hemos calculado en el apartado anterior, y resultó ser 7,75 m · s^{-1}.

c) Para hallar la distancia desde el borde del tejado de la casa, aplicamos las ecuaciones del tiro parabólico:

$$y = x \cdot tg\,\theta - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot cos^2\theta} \cdot x^2 \rightarrow -8 = -0{,}577 \cdot x - 0{,}11 \cdot x^2$$

$$x = 6{,}3 \text{ m}$$

No debemos olvidar que el enunciado pide calcular la distancia a la que cae el martillo medida desde la pared de la casa, no desde el borde del tejado. Como este sobresale 25 cm de la pared, al alcance le hemos de añadir esta distancia. De este modo, la distancia es: 6,3 + 0,25 = 6,55 m.

23. En un movimiento sobre el plano *XY*, la ecuación que expresa dicho movimiento es:

$$\vec{r} = 2 \cdot t \cdot \vec{i} + (160 - 4 \cdot t^2) \cdot \vec{j}$$

a) Calcula la ecuación de la trayectoria.

1. Obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$x = 2 \cdot t$$
$$y = 160 - 4 \cdot t^2$$

2. Y eliminamos la variable tiempo entre las dos ecuaciones. De ese modo, queda:

$$x = 2 \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{2}$$

$$y = 160 - 4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 160 - x^2$$