MATRICES

1. Determinar la matriz transpuesta de cada una de las siguientes;

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\\ 0 & 7\\ 7 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 6\\ -2 & -4 & 2\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5 & 6 & 8\\ 4 & -3 & 0 & 1 & 6\\ -3 & -5 & 4 & 1 & 7\end{pmatrix}$$

Solución:

La traspuesta de una matriz A^t, se obtiene intercambiando las filas con columnas ó viceversa.

$$A_{m\times n} \Rightarrow A^t_{n\times m}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0 & 7\\ 2 & -1 & 7 & 4\end{pmatrix};\ B^t=\begin{pmatrix}0 & -2 & 5\\ -1 & -4 & 1\\ 6 & 2 & -1\end{pmatrix};\ C^t=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -3\\ 1 & -3 & -5\\ 5 & 0 & 4\\ 6 & 1 & 1\\ 8 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

2. Efectúa la siguiente operación con matrices y calcula A

$$2\cdot A-3\cdot\begin{pmatrix}1 & -5 & -6\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}-\left[5\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}-6 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\right]$$

Solución:

$$2\cdot A-\begin{pmatrix}3 & -15 & -18\\ 6 & 9 & 3\\ 12 & 15 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-12 & 0 & 6\\ 2 & 0 & 4\\ -2 & -4 & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$2\cdot A=\begin{pmatrix}3 & -15 & -18\\ 6 & 9 & 3\\ 12 & 15 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 3 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}17 & 0 & -6\\ -2 & 5 & 1\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

$$2A=\begin{pmatrix}-8 & -12 & -13\\ 10 & 7 & 3\\ 14 & 14 & 6\end{pmatrix}$$

$$A=\frac{\begin{pmatrix}-8 & -12 & -13\\ 10 & 7 & 3\\ 14 & 14 & 6\end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix}-4 & -6 & -13/2\\ 5 & 7/2 & 3/2\\ 7 & 7 & 3\end{pmatrix}$$

3. Sean $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5\\ 4 & 1 & 8\\ 6 & -1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 6\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ determinar:

a) $A^t+6B+3C$
b) $(A-C)^t+7B-6B^t$
c) $7A-2C+3(6A^t-2B)$
d) $A-A^t-3(B+C)$

Solución:

a) $A^t + 6B + 3C =$

$$=\begin{pmatrix}-1&2&5\\4&1&8\\6&-1&2\end{pmatrix}^t+6\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1\\2&1&4\\0&1&6\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1&3&2\\3&0&2\\-1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4&6\\2&1&-1\\5&8&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\cdot0&6\cdot0&6\cdot(-1)\\6\cdot2&6\cdot1&6\cdot4\\6\cdot0&6\cdot1&6\cdot6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cdot(-1)&3\cdot3&3\cdot2\\3\cdot3&3\cdot0&3\cdot2\\3\cdot(-1)&3\cdot0&3\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&4&6\\2&1&-1\\5&8&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-6\\12&6&24\\0&6&36\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&9&6\\9&0&6\\-3&0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+0+(-3)&4+0+9&6+(-6)+6\\2+12+9&1+6+0&-1+24+6\\5+0+(-3)&8+6+0&2+36+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&13&6\\23&7&29\\2&14&47\end{pmatrix}$$

b) $(A-C)^t + 7B - 6B^t =$

$$=\left(\begin{pmatrix}-1&2&5\\4&1&8\\6&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&3&2\\3&0&2\\-1&0&3\end{pmatrix}\right)^t+7\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1\\2&1&4\\0&1&6\end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1\\2&1&4\\0&1&6\end{pmatrix}^t=$$

$$=\begin{pmatrix}0&´-1&3\\1&1&6\\7&-1&-1\end{pmatrix}^t+\begin{pmatrix}0&0&-7\\14&7&28\\0&7&42\end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix}0&2&0\\0&1&1\\-1&4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&7\\-1&1&-1\\3&6&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-7\\14&7&28\\0&7&42\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&12&0\\0&6&6\\-6&24&36\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0+0-0&1+0-12&7+(-7)+0\\-1+14-0&1+7-6&-1+28-6\\3+0-(-6)&6+7-24&-1+42-36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-11&0\\13&2&21\\9&-11&5\end{pmatrix}$$

c) $7A - 2C + 3\cdot(6A^t - 2B) =$

$$=7\cdot\begin{pmatrix}-1&2&5\\4&1&8\\6&-1&2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}-1&3&2\\3&0&2\\-1&0&3\end{pmatrix}+3\cdot\left(6\cdot\begin{pmatrix}-1&2&5\\4&1&8\\6&-1&2\end{pmatrix}^t-2\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1\\2&1&4\\0&1&6\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}7\cdot(-1)&7\cdot2&7\cdot5\\7\cdot4&7\cdot1&7\cdot8\\7\cdot6&7\cdot(-1)&7\cdot2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\cdot(-1)&2\cdot3&2\cdot2\\2\cdot3&2\cdot0&2\cdot2\\2\cdot(-1)&2\cdot0&2\cdot3\end{pmatrix}+3\cdot\left(\begin{pmatrix}6\cdot(-1)&6\cdot4&6\cdot6\\6\cdot2&6\cdot1&6\cdot(-1)\\6\cdot5&6\cdot8&6\cdot2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\cdot0&2\cdot0&2\cdot(-1)\\2\cdot2&2\cdot1&2\cdot4\\2\cdot0&2\cdot1&2\cdot6\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}-7&14&35\\28&7&56\\42&-7&14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&6&4\\6&0&4\\-2&0&6\end{pmatrix}+3\cdot\left(\begin{pmatrix}-6&24&36\\12&6&-6\\30&48&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&-2\\4&2&8\\0&2&12\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}-7-(-2)&14-6&35-4\\28-6&7-0&56-4\\42-(-2)&-7-0&14-6\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-6-0&24-0&36-(-2)\\12-4&6-2&-6-8\\30-0&48-2&12-12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-5&8&31\\22&7&52\\44&-7&8\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-6&24&38\\8&4&-14\\30&46&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&8&31\\22&7&52\\44&-7&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cdot(-6)&3\cdot24&3\cdot38\\3\cdot8&3\cdot4&3\cdot(-14)\\3\cdot30&3\cdot46&3\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-5&8&31\\22&7&52\\44&-7&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-18&72&114\\24&12&-42\\90&138&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23&80&145\\46&19&10\\134&131&8\end{pmatrix}$$

d) $A - A^t - 3\cdot(B + C) =$

$$=\begin{pmatrix}-1&2&5\\4&1&8\\6&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2&5\\4&1&8\\6&-1&2\end{pmatrix}^t-3\cdot\left(\begin{pmatrix}0&0&-1\\2&1&4\\0&1&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&3&2\\3&0&2\\-1&0&3\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5\\ 4 & 1 & 8\\ 6 & -1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 4 & 6\\ 2 & 1 & -1\\ 5 & 8 & 2\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0+-1 & 0+3 & -1+2\\ 2+3 & 1+0 & 4+2\\ 0+(-1) & 1+0 & 6+3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1-(-1) & 2-4 & 5-6\\ 4-2 & 1-1 & 8-(-1)\\ 6-5 & -1-8 & 2-2\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 5 & 1 & 6\\ -1 & 1 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 9\\ 1 & -9 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\cdot(-1) & 3\cdot 3 & 3\cdot 1\\ 3\cdot 5 & 3\cdot 1 & 3\cdot 6\\ 3\cdot -1 & 3\cdot 1 & 3\cdot 9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 9\\ 1 & -9 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 9 & 3\\ 15 & 3 & 18\\ -3 & 3 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-(-3) & -2-9 & -1-3\\ 2-15 & 0-3 & 9-18\\ 1-(-3) & -9-3 & 0-27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -11 & -4\\ -13 & -3 & -9\\ 4 & -12 & -27\end{pmatrix}$$

4. Dadas las siguientes matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 5\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}$

Calcular:

a) A·B·C
b) A·(B+C)
c) $B\cdot C\cdot A^t$
d) $(7B-6C)\cdot A^t$

Solución:

a) $A\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1 & 5\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot(-3)+2\cdot 4+3\cdot 0 & -1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 0 & -1\cdot 5+2\cdot 0+3\cdot 1\\ 1\cdot(-3)+2\cdot 4+5\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot 1+5\cdot 0 & 1\cdot 5+2\cdot 0+5\cdot 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}11 & 1 & -2\\ 5 & 3 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}11\cdot(-1)+1\cdot 3+(-2)\cdot(-1) & 11\cdot 0+1\cdot 0+(-2)\cdot 1 & 11\cdot 1+1\cdot 2+(-2)\cdot 5\\ 5\cdot(-1)+3\cdot 3+10\cdot(-1) & 5\cdot 0+3\cdot 0+10\cdot 1 & 5\cdot 1+3\cdot 2+10\cdot 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-11+3+2 & 0+0-2 & 11+2-10\\ -5+9-10 & 0+0+10 & 5+6+50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -2 & 3\\ -6 & 10 & 61\end{pmatrix}$$

b) $A\cdot(B+C)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}-3 & 1 & 5\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}\right)=$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3+(-1) & 1+0 & 5+1\\ 4+3 & 1+0 & 0+2\\ 0+(-1) & 0+1 & 1+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 1 & 6\\ 7 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot(-4)+2\cdot 7+3\cdot(-1) & -1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 1 & -1\cdot 6+2\cdot 2+3\cdot 6\\ 1\cdot(-4)+2\cdot 7+5\cdot(-1) & 1\cdot 1+2\cdot 1+5\cdot 1 & 1\cdot 6+2\cdot 2+5\cdot 6)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}4+14-3 & -1+2+3 & -6+4+18\\ -4+14-5 & 1+2+5 & 6+4+30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 4 & 16\\ 5 & 8 & 40\end{pmatrix}$$

c) $B\cdot C\cdot A^t=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 5\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}^t=$

$$=\begin{pmatrix} -3\cdot(-1)+1\cdot 3+5\cdot(-1) & -3\cdot 0+1\cdot 0+5\cdot 1 & -3\cdot 1+1\cdot 2+5\cdot 5 \\ 4\cdot(-1)+1\cdot 3+0\cdot(-1) & 4\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1 & 4\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 5 \\ 0\cdot(-1)+0\cdot 3+1\cdot(-1) & 0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3+3-5 & 0+0+5 & -3+2+25 \\ -4+3+0 & 0+0+0 & 4+2+0 \\ 0+0+-1 & 0+0+1 & 0+0+5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 24 \\ -1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+5\cdot 2+24\cdot 3 & 1\cdot 1+5\cdot 2+24\cdot 5 \\ -1\cdot(-1)+0\cdot 2+6\cdot 3 & -1\cdot 1+0\cdot 2+6\cdot 5 \\ -1\cdot(-1)+1\cdot 2+5\cdot 3 & -1\cdot 1+1\cdot 2+5\cdot 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+10+72 & 1+10+120 \\ 1+0+18 & -1+0+30 \\ 1+2+15 & -1+2+25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 81 & 131 \\ 19 & 29 \\ 18 & 26 \end{pmatrix}$$

d) $$(7B-6C)\cdot A^t=\left(7\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^t=$$

$$=\begin{pmatrix} 7\cdot(-3)-6\cdot(-1) & 7\cdot 1-6\cdot 0 & 7\cdot 5-6\cdot 1 \\ 7\cdot 4-6\cdot 3 & 7\cdot 1-6\cdot 0 & 7\cdot 0-6\cdot 2 \\ 7\cdot 0-6\cdot(-1) & 7\cdot 0-6\cdot 1 & 7\cdot 1-6\cdot 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15 & 7 & 29 \\ 10 & 7 & -12 \\ 6 & -6 & -23 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -15\cdot(-1)+7\cdot 2+29\cdot 3 & -15\cdot 1+7\cdot 2+29\cdot 5 \\ 10\cdot(-1)+7\cdot 2+(-12)\cdot 3 & 10\cdot 1+7\cdot 2+(-12)\cdot 5 \\ 6\cdot(-1)+(-6)\cdot 2+(-23)\cdot 3 & 6\cdot 1+(-6)\cdot 2+(-23)\cdot 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15+14+87 & -15+14+145 \\ -10+14-36 & 10+14-60 \\ -6-12-69 & 6-12-115 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 116 & 144 \\ -32 & -36 \\ -87 & -121 \end{pmatrix}$$

5. Calcular A·B y B·A siendo A y B las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A_{1\times 4}\cdot B_{4\times 1}=AB_{1\times 1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 3+3\cdot 1+2\cdot(-2)+(-1)\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{4\times 1}\cdot A_{1\times 4}=AB_{4\times 4}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 3 & 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 3 & 1\cdot 2 & 1\cdot(-1) \\ -2\cdot 1 & -2\cdot 3 & -2\cdot 2 & -2\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & -4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^2, A^3 y A^{428}

Solución:

$$A^2=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16-15+3 & 20-20+4 & -4+5+0 \\ -12+12-3 & -15+16-4 & 3-4+0 \\ -12+12+0 & -15+16+0 & 3-4+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-12-3 & 20-16-4 & -4+4+0 \\ -12+9+3 & -15+12+4 & 3-3+0 \\ 0-3+3 & 0-4+4 & 0+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Teniendo en cuenta el resultado de A^3 se puede obtener cualquier potencia ya que, las sucesivas potencias de A se irán repitiendo en un ciclo de tres;

$$A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$
$$A^5 = A^4 \cdot A = A \cdot A = A^2$$
$$A^6 = A^5 \cdot A = A^2 \cdot A = A^3 = I$$

y así sucesivamente. Teniendo en cuenta que 468 dividido entre tres da de cociente 142 y de resto 2:

$$428 = 3 \cdot 142 + 2$$
$$A^{428} = A^{3\cdot 142+2} = A^{3\cdot 142} \cdot A^2 = (A^3)^{142} \cdot A^2 = I^{142} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2$$
$$A^{428} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Sea la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ determinar A^2, A^3 y A^n

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Del resultado de A^3 se puede inferir que cualquier potencia superior a tres será la matriz nula.

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A^n para todo n natural.

Solución:

Se calculan las primeras potencias para comprobar si existe alguna ley de recurrencia entre ellas.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como se puede observar las sucesivas potencias de A se diferencian únicamente en el término 3.1 que va variando según la potencia.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Probar que $A^n = 2^{n-1} \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot A = 2^{2-1} \cdot A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = 2A \cdot A = 2 \cdot A^2 = 2 \cdot 2A = 2^2 \cdot A = 2^{3-1} \cdot A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = 2^2 A \cdot A = 2^2 \cdot A^2 = 2^2 \cdot 2A = 2^3 \cdot A = 2^{4-1} \cdot A$$

sucesivamente se llega a:

$$A^n = 2^{n-1} \cdot A$$

10. Calcular A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = 3A \cdot A = 3 \cdot A^2 = 3 \cdot 3A = 3^2 \cdot A = 3^{3-1} \cdot A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = 3^2 A \cdot A = 3^2 \cdot A^2 = 3^2 \cdot 3A = 3^3 \cdot A = 3^{4-1} \cdot A$$

sucesivamente se llega a:

$$A^n = 3^{n-1} \cdot A$$

11. Hallar las matrices A^n y B^n siendo $A = \begin{pmatrix} a & 1/n & 1/n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Solución:

Cálculo de A^n. Para no complicar el ejercicio con operaciones con fracciones se cambia la fracción $1/n$ por el parámetro b, quedando la matriz $\begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a \cdot b + b & a \cdot b + b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & a \cdot b + b & a \cdot b + b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & a^2 \cdot b + a \cdot b + b & a^2 \cdot b + a \cdot b + b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} a^3 & a^2 \cdot b + a \cdot b + b & a^2 \cdot b + a \cdot b + b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & a^3 \cdot b + a^2 \cdot b + a \cdot b + b & a^3 \cdot b + a^2 \cdot b + a \cdot b + b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a partir de esta secuencia se puede inferir A^n

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & b \cdot \sum_1^n a^{n-1} & b \cdot \sum_1^n a^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deshaciendo el cambio inicial $\left(b = \frac{1}{n} \right)$ se obtiene

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & \frac{1}{n}\cdot\sum_1^n a^{n-1} & \frac{1}{n}\cdot\sum_1^n a^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de B^n.

$$B^2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha\cdot\cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha & -2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha \\ 2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha & -\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2\cdot B = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha\cdot\cos\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha & -\cos 2\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha\cdot\cos\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha\cdot\cos\alpha + \cos 2\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha & -\operatorname{sen} 2\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha + \cos 2\alpha\cdot\cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 3\alpha & -\operatorname{sen} 3\alpha \\ \operatorname{sen} 3\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\operatorname{sen} n\alpha \\ \operatorname{sen} n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

12. Se consideran matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ siendo $a, b \in \Re$

a) Calcular M^n, n = 1,2,...
b) Hallar todas las matrices de M tales que M^{100} = V.

Solución:

a) $$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+0 & ab+ab \\ 0+0 & 0+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2\cdot M = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3+0 & a^2b+2a^2b \\ 0+0 & 0+a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^3\cdot M = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4+0 & a^3b+3a^3b \\ 0+0 & 0+a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

observando la ley que siguen las sucesivas potencias:

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

b) $M^{100} = V$; $\begin{pmatrix} a^{100} & 100a^{99}b \\ 0 & a^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

identificando por términos:

1.1. $a^{100} = 1$
1.2. $100a^{99}b = 1$
2.1. $0 = 0$
2.2. $a^{100} = 1$

De la primera y última igualdad se obtiene: a = ±1, que sustituyendo en la segunda:

- Si a = 1 $\quad 100\cdot 1^{99}\cdot b=1$; $\quad$ b = 1/100
- Si a = -1 $\quad 100\cdot(-1)^{99}\cdot b=1$; $\quad$ b = -1/100

Por lo tanto, las posibles matrices M serán:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1/100\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad M=\begin{pmatrix}-1 & -1/100\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

13. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) calcular la matriz $(A-I)^2$
b) haciendo uso del apartado anterior determinar A^4.

Solución:

a) Operando con las matrices A e I

$$A-I=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot2+2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-2) & 1\cdot-1+2\cdot1+(-1)\cdot1\\ -1\cdot1+(-2)\cdot(-1)+1\cdot(-1) & -1\cdot2+(-2)\cdot(-2)+1\cdot(-2) & -1\cdot(-1)+(-2)\cdot1+1\cdot1\\ -1\cdot1+(-2)\cdot(-1)+1\cdot(-1) & -1\cdot2+(-2)\cdot(-2)+1\cdot(-2) & -1\cdot(-1)+(-2)\cdot1+1\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) Sí $(A-I)^2=0$, y teniendo en cuenta que una de las matrices del binomio es la matriz identidad y por tanto es aplicable el binomio de Newton, por ser conmutable el producto de una matriz por la matriz identidad;

$$(A-I)^2=A^2-2\cdot A\cdot I+I^2=A^2-2\cdot A+I=0$$

despejando A^2 de la última igualdad

$$A^2=2\cdot A-I$$

$$A^4=(A^2)^2=(2\cdot A-I)^2=4\cdot A^2-4\cdot A\cdot I+I^2=4A^2-4A+I$$

Sustituyendo A^2 por su valor

$$A^4=4\cdot(2\cdot A-I)-4\cdot A+I=4A-3I=$$

$$=4\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ -4 & -7 & 4\\ -4 & -8 & 5\end{pmatrix}$$

14. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, calcular B^3 y A^4 (Sugerencia: A=B+I)

Solución:

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall n \geq 3$$

Teniendo en cuenta la sugerencia del enunciado:

$$A^4 = (B+I)^4$$

Para desarrollar un binomio por el método de Newton hay que tener en cuenta que los productos sean conmutativos ya que el método en sí lo presupone. Si el binomio está formado por matrices, solo se podrá aplicar el método de Newton si estas son una la inversa de la otra ó una de ellas es la matriz identidad, por ser estos los únicos casos en los que se cumple la propiedad conmutativa.

$$A^4 = (B+I)^4 = B^4 + 4B^3I + 6B^2I^2 + 4BI^3 + I^4 = B^4 + 4B^3 + 6B^2 + 4B + I$$

Sustituyendo por sus valores

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular:

a) Demostrar $A^3+I_3=0$
b) Teniendo en cuenta el apartado anterior calcular A^{10}.

Solución.

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3-4 & 0-12+12 & -4+0+4 \\ 0+4-4 & 3-16+12 & 4-20+16 \\ +-3+3 & -3+12-9 & -4+15-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0-1 & -3+0+3 & -4+0+4 \\ 0+4-4 & 3-16+12 & 4-20+16 \\ 0-3+3 & -3+12-9 & -4+15-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^3 + I = -I + I = 0$$

b) $A^{10} = A^9 \cdot A = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A$

$$A^{10} = -\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

16. Demostrar $(A+B)^t=A^t+B^t$

Solución:

$$\left[\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots & a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m.1} & a_{m.2} & \cdots & a_{m.n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1.1} & b_{1.2} & \cdots & b_{1.n} \\ b_{2.1} & b_{2.2} & \cdots & b_{2.n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m.1} & b_{m.2} & \cdots & b_{m.n} \end{pmatrix}\right]^t = \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots & a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m.1} & a_{m.2} & \cdots & a_{m.n} \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} b_{1.1} & b_{1.2} & \cdots & b_{1.n} \\ b_{2.1} & b_{2.2} & \cdots & b_{2.n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m.1} & b_{m.2} & \cdots & b_{m.n} \end{pmatrix}^t$$

$$\begin{pmatrix} a_{1.1}+b_{1.1} & a_{1.2}+b_{1.2} & \cdots & a_{1.n}+b_{1.n} \\ a_{2.1}+b_{2.1} & a_{2.2}+b_{2.2} & \cdots & a_{2.n}+b_{2.n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m.1}+b_{m.1} & a_{m.2}+b_{m.2} & \cdots & a_{m.n}+b_{m.n} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & \cdots & a_{m.1} \\ a_{1.2} & a_{2.2} & \cdots & a_{m.2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1.n} & a_{2.n} & \cdots & a_{m.n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1.1} & b_{2.1} & \cdots & b_{m.1} \\ b_{1.2} & b_{2.2} & \cdots & b_{m.2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1.n} & b_{2.n} & \cdots & b_{m.n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1.1}+b_{1.1} & a_{2.1}+b_{2.1} & \cdots & a_{m.1}+b_{m.1} \\ a_{1.2}+b_{1.2} & a_{2.2}+b_{2.2} & \cdots & a_{m.2}+b_{m.2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1.n}+b_{1.n} & a_{2.n}+b_{2.n} & \cdots & a_{m.n}+b_{m.n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1.1}+b_{1.1} & a_{2.1}+b_{2.1} & \cdots & a_{m.1}+b_{m.1} \\ a_{1.2}+b_{1.2} & a_{2.2}+b_{2.2} & \cdots & a_{m.2}+b_{m.2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1.n}+b_{1.n} & a_{2.n}+b_{2.n} & \cdots & a_{m.n}+b_{m.n} \end{pmatrix}$$

17. Demostrar que cualquier matriz cuadrada puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Solución:

Sea A una matriz cuadrada cualquiera. Se pide demostrar que A se puede escribir siempre como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

$$A = B + C$$

Siendo B una matriz simétrica ($B^t = B$) y C una matriz antisimétrica ($C^t = -C$)

Sí $A = B + C$ por la propiedades de la transposición de matrices

$$A^t = (B + C)^t = B^t + C^t = B - C$$

$$A^t = B - C$$

Con las dos ecuaciones obtenidas se puede plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (B y C) que al resolverlo da los valores de B y C en función de A y A^t.

$$\begin{cases} B + C = A \\ B - C = A^t \end{cases} : \text{ Resolviendo } \begin{cases} B = \dfrac{A + A^t}{2} \\ C = \dfrac{A - A^t}{2} \end{cases}$$

Otra forma:

Si A es una matriz simétrica de orden 3, debe tener la forma $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & t & s \\ z & s & v \end{pmatrix}$

Si B es una matriz antisimétrica de orden 3, debe tener la forma $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

Para la demostración se parte de una matriz cuadrada de orden tres, siendo análoga la demostración para cualquier otro orden.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, el problema se resuelve planteando la siguiente igualdad entre matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & t & s \\ z & s & v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

siendo la solución la expresión de las variables en función de losa a_{ij}.
Sumando e igualando la expresión anterior se obtiene

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} = x & a_{1.2} = y + a & a_{1.3} = z + b \\ a_{2.1} = y - a & a_{2.2} = t & a_{2.3} = s + c \\ a_{3.1} = z - b & a_{3.2} = s - c & a_{3.3} = v \end{pmatrix}$$

de los términos 1.1, 2.2 y 3.3 se obtiene los valores de x, t y v. Planteando un sistema entre los términos 1.2 y 2.1 se obtiene las expresiones de a e y, mediante un sistema de 2×2:

$$\begin{cases} y + a = a_{1.2} \\ y - a = a_{2.1} \end{cases} : y = \frac{a_{1.2} + a_{2.1}}{2} ; a = \frac{a_{1.2} - a_{2.1}}{2}$$

Con los términos 1.3 y 3.1 se obtienen z y b:

$$\begin{cases} z + b = a_{1.3} \\ z - b = a_{3.1} \end{cases} : z = \frac{a_{1.3} + a_{3.1}}{2} ; b = \frac{a_{1.3} - a_{3.1}}{2}$$

Con los términos 2.3 y 3.2 se obtienen s y c:

$$\begin{cases} s + c = a_{2.3} \\ s - c = a_{3.2} \end{cases} : s = \frac{a_{2.3} + a_{3.2}}{2} ; c = \frac{a_{2.3} - a_{3.2}}{2}$$

Sustituyendo en la primera ecuación queda:

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1.1} & \frac{a_{2.1} + a_{2.1}}{2} & \frac{a_{1.3} + a_{3.1}}{2} \\ \frac{a_{2.1} + a_{2.1}}{2} & a_{2.2} & \frac{a_{2.3} + a_{3.2}}{2} \\ \frac{a_{1.3} + a_{3.1}}{2} & \frac{a_{2.3} + a_{3.2}}{2} & a_{3.3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{2.1} - a_{2.1}}{2} & \frac{a_{1.3} - a_{3.1}}{2} \\ -\frac{a_{2.1} - a_{2.1}}{2} & 0 & \frac{a_{2.3} - a_{3.2}}{2} \\ -\frac{a_{1.3} - a_{3.1}}{2} & -\frac{a_{2.3} - a_{3.2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

quedando demostrado que cualquier matriz cuadrada se puede expresar como una suma de una matriz simétrica u otra antisimétrica.

Se recomienda repetir este problema para una matriz cuadrada de orden 2.

18. Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y comprobar que lo es multiplicándola por la dada.

Solución:

$$A^{-1} = \frac{(\mathrm{adj}A)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} +3 & -(-2) \\ -(-1) & +2 \end{pmatrix}^t}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{3}{4} + -1 \cdot \frac{1}{2} & 2 \cdot \frac{1}{4} + -1 \cdot \frac{1}{2} \\ -2 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} & -2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19. Hallar la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa, es que su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{(\mathrm{adj}A)^t}{|A|}$$

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{adj}A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(\mathrm{adj}A)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

20. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ averiguar, para qué valores del parámetro m tiene inversa. Calcular la inversa para m = 2.

Solución:

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero. A toda matriz que tenga inversa se la denomina matriz regular.

Teniendo en cuenta lo anterior, el primer paso para la resolución del problema será expresar el determinante de A en función del parámetro.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = \{C_3 = C_3 + C_1\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & 4-m \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & 4-m \end{vmatrix} = m\cdot(4-m) - 3\cdot 1$$

$$|A| = 4m - m^2 - 3 = -1\cdot(m^2 - 4m + 3) = -1\cdot(m-1)\cdot(m-3)$$

igualando a cero de expresión del determinante, se encuentran los valores del parámetro para los que la matriz A no tiene inversa.

$$-1\cdot(m-1)\cdot(m-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ m-3=0 \end{cases} \quad m = 1 \text{ ó } m = 3$$

$$\exists\, A^{-1}\ \forall\, m \in R - \{1,3\}$$

Sí m = 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $|A| = -1\cdot(2-1)\cdot(2-3) = 1$

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\mathrm{adj}A\right)^t=\begin{pmatrix}-7 & -1 & 2\\ 12 & 2 & -3\\ -8 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{\left(\mathrm{adj}A\right)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-7 & -1 & 2\\ 12 & 2 & -3\\ -8 & -1 & 2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}-7 & -1 & 2\\ 12 & 2 & -3\\ -8 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

21. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, demostrar que A es inversa de B.

Solución:

Sí una matriz es inversa de otra, su producto debe ser la matriz identidad.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot(-4)+3\cdot 2 & 1\cdot(-2)+2\cdot 1+3\cdot 0 & 1\cdot(-1)+2\cdot(-1)+3\cdot 1\\ 2\cdot 3+5\cdot(-4)+7\cdot 2 & 2\cdot(-2)+5\cdot 1+7\cdot 0 & 2\cdot(-1)+5\cdot(-1)+7\cdot 1\\ -2\cdot 3+(-4)\cdot(-4)+(-5)\cdot 2 & -2\cdot(-2)+(-4)\cdot 1+(-5)\cdot 0 & -2\cdot(-1)+(-4)\cdot(-1)+(-5)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

por lo que queda demostrado que A es la inversa de B ó B es la inversa de A.

22. Sea $A=\begin{pmatrix}a+b & b\\ 2a & a+b\end{pmatrix}$. Calcular para que valores de a y b existe A^{-1}. Calcular la inversa de A en función de a y b.

Solución.

La condición <u>necesaria y suficiente</u> para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero

$$\begin{vmatrix}a+b & b\\ 2a & a+b\end{vmatrix}=(a+b)\cdot(a+b)-2a\cdot b=(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$$

Exceptuando el caso en que simultáneamente a y b sean nulos, para cualquier otra pareja de valores de a y b existe la inversa de A.

$$A^{-1}=\frac{\left(\mathrm{adj}\,A\right)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}+(a+b) & -2a\\ -b & +(a+b)\end{pmatrix}^t}{a^2+b^2}=\frac{\begin{pmatrix}a+b & -b\\ -2a & a+b\end{pmatrix}}{a^2+b^2}=\begin{pmatrix}\frac{a+b}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2}\\ -\frac{2a}{a^2+b^2} & \frac{a+b}{a^2+b^2}\end{pmatrix}$$

23. Determinar para que valores de x tiene inversa la matriz $\begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 0 & 3x & -x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ y calcularla en función de x.

Solución.

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero

Matriz triangular superior. El determinante es el producto de los términos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 3x & x & x \\ 0 & 3x & -x \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 3x \cdot 3x \cdot x = 9x^3$$

Si $x \neq 0$ el determinante de A es distinto de cero y por tanto, existe inversa de la matriz.

Calculo de la inversa

$$\begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 0 & 3x & -x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\left[\operatorname{adj}\begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 0 & 3x & -x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\right]^t}{\begin{vmatrix} 3x & x & x \\ 0 & 3x & -x \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3x & -x \\ 0 & x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -x \\ 0 & x \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x \\ 0 & x \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3x & x \\ 0 & x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3x & x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} x & x \\ 3x & -x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3x & x \\ 0 & -x \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3x & x \\ 0 & 3x \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t}{9x^3} = \frac{\begin{pmatrix} 3x^2 & 0 & 0 \\ -x^2 & 3x^2 & 0 \\ -4x^2 & 3x^2 & 9x^2 \end{pmatrix}^t}{9x^3} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 3x^2 & -x^2 & -4x^2 \\ 0 & 3x^2 & 3x^2 \\ 0 & 0 & 9x^2 \end{pmatrix}}{9x^3} = \begin{pmatrix} \frac{3x^2}{9x^3} & \frac{-x^2}{9x^3} & \frac{-4x^2}{9x^3} \\ \frac{0}{9x^2} & \frac{3x^2}{9x^3} & \frac{3x^2}{9x^3} \\ \frac{0}{9x^3} & \frac{0}{9x^3} & \frac{9x^2}{9x^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3x} & -\frac{1}{9x} & -\frac{4}{9x} \\ 0 & \frac{1}{3x} & \frac{1}{3x} \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

24. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, obtener si procede $(B \cdot A)^{-1}$

Solución:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot(-1)+1\cdot 1+0\cdot 2 & -2\cdot 0+1\cdot(-2)+0\cdot 3 \\ 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+2\cdot 2 & 0\cdot 0+(-1)\cdot(-2)+2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(B\cdot A)^{-1} = \frac{(\operatorname{adj} A)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} +8 & -3 \\ -(-2) & +3 \end{pmatrix}^t}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t}{30} = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}{30} = \begin{pmatrix} 8/30 & 2/30 \\ -3/30 & 3/30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/15 & 1/15 \\ -1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$$

25. Se sabe (no es necesario que lo compruebe) que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ verifica la igualdad $A^2 = A + I$, siendo I la matriz identidad. Calcular A^{-1} y A^4.

Solución:

Sí el producto de dos matrices es la matriz identidad, una es la inversa de la otra. De la ecuación que se propone, se despeja la matriz identidad;

$$A^2 - A = I$$

Factorizando el primer miembro de la igualdad

$$A\cdot(A-I) = I$$

multiplicando por la izquierda ambos miembros de la igualdad por la matriz A^{-1}

$$A^{-1}\cdot A\cdot(A-I) = A^{-1}\cdot I$$

Teniendo en cuenta que:

i) $A^{-1}\cdot A = I$
ii) $A^{-1}\cdot I = A^{-1}$

$$A^{-1} = (A-I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \left(A^2\right)^2 = (A+I)^2$$

dado que el producto de una matriz por la matriz identidad es conmutativo, se puede aplicar el desarrollo de Newton al binomio $(A + I)^2$.

$$A^4 = (A+I)^2 = A^2 + 2AI + I^2 = A^2 + 2A + I$$

Sustituyendo A^2 por $A + I$

$$A^4 = (A+I) + 2A + I = 3A + 2I$$

$$A^4 = 3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 6 & -3 \\ 21 & 14 & 3 & -18 \\ -27 & -6 & 5 & 21 \\ 6 & 15 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

26. Determinar el rango de cada una de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Rango de una matriz es el número de vectores fila o vectores columna linealmente independientes. El máximo rango de una matriz es menor ó igual que la menor de las dimensiones de la matriz. A partir de un menor de orden uno distinto de cero se va orlando hasta encontrar el mayor menor distinto de cero.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=2\ ,\ \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 6\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=3\ ;\ \begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 6\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=2\neq 0$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}=2\ ;\ \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5\neq 0\ ;\ \begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 5\end{vmatrix}=0$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 5\\ 1 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix}=2\ ,\ \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-7\neq 0$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=3\ ,\ \begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-6\neq 0$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 3 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 0\end{pmatrix}=3\ ,\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & 5 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0\ ,\ \begin{vmatrix}-4 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 3 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=4\ ,\ \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-30\neq 0$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 5 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=4\ ,\ \begin{vmatrix}-3 & 1 & 5 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=37\neq 0$$

27. Sea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, se pide:

b) Calcular el rango de A
c) Hallar A^{12}

Solución.

a) El mayor menor distinto de cero es de orden tres;

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$\operatorname{rg} A = 3$$

b) Se calcula A^2, A^3 y A^4 y se infiere A^n.

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ A^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ A^4=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$A^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

28. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular una matriz X para que se cumpla la igualdad; A = X · B

Solución:

Para resolver una ecuación matricial hay que tener en cuenta una serie conceptos.

1. El producto de matrices no es conmutativo. Para multiplicar una igualdad de matrices hay que multiplicar ambos miembros por la misma matriz y en el mismo orden
2. El producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad. Se utilizará está propiedad para despejar la matriz incógnita

$$A = X \cdot B$$

Multiplicando por la derecha ambos miembros de la igualdad por B^{-1}.

$$A \cdot B^{-1} = X \cdot B \cdot B^{-1}$$
$$A \cdot B^{-1} = X \cdot I$$
$$X = A \cdot B^{-1}$$

Cálculo de la inversa de B^{-1}.

$$B^{-1} = \frac{(\text{adj}B)^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-15 & -1+6 \\ 12-10 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

29. Hallar los valores de k para los cuales la matriz $\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$

a) no tiene inversa
b) tiene rango 3

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero. Se plantea la siguiente ecuación

$$\begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Para calcular el determinante se tienen en cuenta las propiedades de estos

$$\begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{sacando} \\ \text{factor común} \\ \text{de} -k \text{ en la} \\ 1^{\text{a}} \text{ columna} \end{matrix} \right\} = -k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -k & 0 & -1 \\ 1 & -k & -k & -1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ F_4 = F_4 - F_1 \end{matrix} \right\} = -k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix}$$

desarrollando por lo adjuntos de la 1ª columna

$$-k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} = -k \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{sacando} \\ \text{factor común} \\ \text{de} -3 \text{ en la} \\ 1^{\text{a}} \text{ fila} \end{matrix} \right\} =$$

$$= k\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} = 3k\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 = C_1 - C_3 \\ C_2 = C_2 - C_3 \end{Bmatrix} = 3k\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -k+3 & 2 & -7 \\ -k+3 & -k+2 & -7 \end{vmatrix}$$

desarrolla por los adjuntos de la 1ª fila

$$3k\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -k+3 & 2 & -7 \\ -k+3 & -k+2 & -7 \end{vmatrix} = 3k\cdot 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -k+3 & 2 \\ -k+3 & -k+2 \end{vmatrix} = 3k\cdot(-k+3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -k+2 \end{vmatrix}$$

$$3k\cdot(-k+3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -k+2 \end{vmatrix} = \{F_2 - F_1\} = 3k\cdot(-k+3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -k \end{vmatrix} = 3k\cdot(-k+3)\cdot(-k) = 3k^2\cdot(k-3)$$

igualando a cero la expresión del determinante

$$3k^2\cdot(k-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3k^2 = 0, & k = 0 \\ (k-3) = 0, & k = 3 \end{cases}$$

$$\forall\, k \neq 0, 3\ \exists\, A^{-1}$$

b) El rango de la matriz solo puede ser menor o igual a tres para k = 0 ó k = 1, para cualquier otro valor de k, el rango de la matriz es cuatro ya que su determinante es distinto de cero.

Para $k = 0$: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

El rango de la matriz es tres ya que existe un menor de orden tres ($\alpha_{4.1}$) distinto de cero

$$\alpha_{4.1}: \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Para $k = -3$: $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

El rango de la matriz es tres ya que existe un menor de orden tres ($\alpha_{4.4}$) distinto de cero

$$\alpha_{4.4}: \begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$$

$$rg\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

30. Determinar una matriz cuadrada A de orden 2 tal que $A+A^t=2I$, y $\det(A)=2$, siendo I la matriz identidad, y A^t la transpuesta de la matriz A.

Solución:

Se define una matriz genérica $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, sustituyendo esta matriz en la ecuación $A+A^t=2I$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2x & y+z \\ z+y & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ y+z=0 \\ z+y=0 \\ 2t=2 \end{cases} \xrightarrow{\text{EQUIV.}} \begin{cases} x=1 \\ y+z=0 \\ t=1 \end{cases}$$

31. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, determinar, si es posible, un valor de k para el que la matriz $(A-k\cdot I)^2$ sea la matriz nula.

Solución:

El problema se puede plantear bien como una igualdad matricial o mediante determinantes
Por matrices:

$$(A-k\cdot I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - k\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

operando el paréntesis

$$\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

multiplicando el primer miembro

$$\begin{pmatrix} (-k)\cdot(-k)+(-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot 1 & (-k)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-k)+(-2)\cdot 1 & (-k)\cdot(-2)+(-1)\cdot(-2)+(-2)\cdot(3-k) \\ (-1)\cdot(-k)+(-k)\cdot(-1)+(-2)\cdot 1 & (-1)\cdot(-1)+(-k)\cdot(-k)+(-2)\cdot 1 & (-1)\cdot(-2)+(-k)\cdot(-2)+(-2)\cdot(3-k) \\ 1\cdot(-k)+1\cdot(-1)+(3-k)\cdot 1 & 1\cdot(-1)+1\cdot(-k)+(3-k)\cdot 1 & 1\cdot(-2)+1\cdot(-2)+(3-k)\cdot(3-k) \end{pmatrix}$$

igualando

$$\begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

identificando término a término, el único valor que cumple todas las igualdades es k=1

32. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que A·X·A = C, siendo C = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

De la ecuación propuesta se despeja la matriz X, teniendo en cuenta las propiedades de las operaciones con matrices.

$$A\cdot X\cdot A = C$$

Multiplicando por la derecha ambos miembros de la ecuación por A^{-1}

$$A\cdot X\cdot \underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I} = C\cdot A^{-1} \qquad A\cdot X\cdot I = C\cdot A^{-1}$$

$$A\cdot X = C\cdot A^{-1}$$

Multiplicando por la izquierda ambos miembros de la ecuación por A^{-1}

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot X = A^{-1}\cdot C\cdot A^{-1} \qquad I\cdot X = A^{-1}\cdot C\cdot A^{-1}$$

$$X = A^{-1}\cdot C\cdot A^{-1}$$

Sí la matriz A tiene inversa, la ecuación tiene solución única. En caso contrario o no tiene solución ó tiene infinitas soluciones.

Inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{(\operatorname{adj} A)^t}{|A|} = \frac{\left(\operatorname{adj}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)^t}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación matricial y operando

$$X = A^{-1}\cdot C\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+(-3)\cdot 2 & 2\cdot 1+(-3)\cdot 3 \\ -1\cdot 1+2\cdot 2 & -1\cdot 1+2\cdot 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot 2+(-7)\cdot(-1) & -4\cdot(-3)+(-7)\cdot 2 \\ 3\cdot 2+5\cdot(-1) & 3\cdot(-3)+5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

33. Resolver la ecuación matricial: $A\cdot B\cdot X - C\cdot X = 2\cdot C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

De la ecuación propuesta se despeja la matriz X, teniendo en cuenta las propiedades de las operaciones con matrices.

Se saca factor común por la derecha de la matriz X en el primer miembro

$$A\cdot B\cdot X - C\cdot X = 2\cdot C : \ (A\cdot B - C)\cdot X = 2C$$

Para despejar la matriz X, se multiplican ambos miembros por la izquierda por la matriz $(A\cdot B - 2C)^{-1}$.

$$(A\cdot B - 2C)^{-1}\cdot(A\cdot B - C)\cdot X = (A\cdot B - 2C)^{-1}\cdot 2C$$

Teniendo en cuenta que el producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad, y que la matriz identidad es el elemento neutro de la multiplicación de matrices se obtiene:

$$X = (A\cdot B - 2C)^{-1}\cdot 2C$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\cdot 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 2 & 1\cdot 1+2\cdot(-1) & 1\cdot 1+2\cdot 1 \\ 2\cdot 3+1\cdot 2 & 2\cdot 1+1\cdot(-1) & 2\cdot 1+1\cdot 1 \\ 0\cdot 3+1\cdot 2 & 0\cdot 1+1\cdot(-1) & 0\cdot 1+1\cdot 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\cdot 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7-1 & -1-1 & 3-0 \\ 8-(-1) & 1-2 & 3-1 \\ 2-1 & -1-(-1) & 1-1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -40 & 38 & -24 \\ -30 & 30 & -20 \end{pmatrix}$$

cálculo de la inversa:

$$|A\cdot B - C| = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$(A\cdot B-C)^{-1}=\frac{[\operatorname{adj}(AB-C)]^t}{|AB-C|}=\frac{\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}9 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}9 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}6 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}6 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}6 & 3\\ 9 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}6 & -2\\ 9 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -2\\ -1 & 15 & 12\end{pmatrix}^t}{-1}=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -15 & -12\end{pmatrix}^t=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -15\\ -1 & 2 & -12\end{pmatrix}$$

34. Sea A = $\begin{pmatrix}4 & -6\\ 3 & -5\end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix}4 & -3\\ 6 & -5\end{pmatrix}$ encontrar una matriz simétrica P no singular tal que B = $P^{-1}\cdot A\cdot P$.

Solución:

Se pide encontrar una matriz P no singular que cumpla la relación B = $P^{-1}\cdot A\cdot P$. Para poder trabajar con esta relación se debe quitar la matriz P^{-1}. Se dice que una matriz es no singular cuando es regular, es decir, cuando tiene inversa, o dicho de otra forma, cuando su determinante es distinto de cero.

Multiplicando por la izquierda por la matriz P, se consigue otra relación en la que no interviene la matriz P−1, y permite trabajar con una matriz genérica P.

$$P\cdot B = P\cdot P^{-1}\cdot A\cdot P$$
$$P\cdot B = I\cdot A\cdot P$$
$$P\cdot B = A\cdot P$$
$$\begin{pmatrix}x & y\\ y & z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3\\ 6 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 3 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ y & z\end{pmatrix}$$

Operando

$$\begin{pmatrix}4x+6y & -3x-5y\\ 4y+6z & -3y-5z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x-6y & 4y-6z\\ 3x-5y & 3y-5z\end{pmatrix}$$

igualando término a término

$$\begin{cases}1.1: 4x+6y=4x-6y\\ 1.2: -3x-5y=4y-6z\\ 2.1: 4y+6z=3x-5y\\ 2.2: -3y-5z=3y-5z\end{cases}\ \text{simplificando}\ \begin{cases}12\cdot y=0\\ 3x+9y-6z=0\\ 3x-9y-6z=0\\ 6y=0\end{cases}\ \text{equivalente a}\ \begin{cases}y=0\\ x-2z=0\end{cases}$$

sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Para resolver el sistema habrá que tomar una variable como parámetro y expresar las demás variables en función del parámetro.

$$z=\lambda: \begin{cases}y=0\\ x=2\lambda\end{cases}$$

$$P=\begin{pmatrix}2\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\quad \forall\lambda\in\Re$$

para sacar una solución particular, se le dan valores a λ, por ejemplo:

$$\begin{cases}\lambda=1\rightarrow P=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\end{cases}$$

35. Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar una matriz X, tal que $A\cdot X + B = A$

Solución:

De la ecuación matricial propuesta se despeja la matriz X teniendo en cuenta las propiedades de las operaciones con matrices

i) El producto de matrices no es conmutativo. Para multiplicar una igualdad de matrices hay que multiplicar ambos miembros por la misma matriz y en el mismo orden

ii) El producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad. Se utilizará está propiedad para despejar la matriz incógnita

$$A\cdot X + B = A$$
$$A\cdot X = A - B$$
$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(A - B)$$
$$I\cdot X = A^{-1}\cdot(A - B)$$
$$X = A^{-1}\cdot(A - B)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right] = \frac{\left[\operatorname{adj}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^t}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

36. Determinar los valores de x, y, z para que se verifique la igualdad $\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Solución:

Operando e primer miembro e identificando miembro a miembro se calculan los posibles valores de x, y , z.

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1+y^2 & x+y\cdot z \\ x+z\cdot y & x^2+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

identificando término a término:

$$\begin{cases} 1.1: & 1+y^2 = 5 \\ 1.2: & x+y\cdot z = 0 \\ 2.1: & x+z\cdot y = 0 \\ 2.2: & x^2+z^2 = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{Equivalente}} \begin{cases} 1+y^2 = 5 \\ x+y\cdot z = 0 \\ x^2+z^2 = 5 \end{cases}$$

resolviendo el sistema por sustitución:

$$y = \pm\sqrt{4} = \pm 2 : \begin{cases} y = 2 : \begin{cases} x+2z = 0 \\ x^2+z^2 = 5 \end{cases} : z = \pm 1 : \begin{cases} z = 1\ ;\ \ x = -2 \\ z = -1\ ;\ \ x = 2 \end{cases} : \begin{cases} x = -2;\ \ y = 2;\ \ z = 1 \\ x = 2;\ \ y = 2;\ \ z = -1 \end{cases} \\ y = -2 : \begin{cases} x-2z = 0 \\ x^2+z^2 = 5 \end{cases} : z = \pm 1 : \begin{cases} z = 1\ ;\ \ x = 2 \\ z = -1\ ;\ \ x = -2 \end{cases} : \begin{cases} x = 2;\ \ y = -2;\ \ z = 1 \\ x = -2;\ \ y = -2;\ \ z = -1 \end{cases} \end{cases}$$

37. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ encontrar las matrices B = $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $A\cdot B = -B\cdot A$.

Solución:

Sustituyendo en la igualdad A y B por sus valores, multiplicando ambos miembros e igualando las dos matrices, se obtiene un sistema cuya solución serán los valores de a, b y c.

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot a + (-4)\cdot 0 & 3\cdot b + (-4)\cdot c \\ 2\cdot a + (-3)\cdot 0 & 2\cdot b + (-3)\cdot c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a\cdot 3 + b\cdot 2 & a\cdot(-4) + b\cdot(-3) \\ 0\cdot 3 + c\cdot 2 & 0\cdot(-4) + c\cdot(-3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a & 3b-4c \\ 2a & 2b-3c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3a+2b & -4a-3b \\ 2c & -3c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a & 3b-4c \\ 2a & 2b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-2b & 4a+3b \\ -2c & 3c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1.1: \quad 3a = -3a - 2b \\ 1.2: \quad 3b - 4c = 4a + 3b \\ 2.1: \quad 2a = -2c \\ 2.2: \quad 2b - 3c = 3c \end{cases}$$

simplificando y ordenando:

$$\begin{cases} 3a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ a + c = 0 \\ b - 3c = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{EQUIVALENTE}} \begin{cases} 3a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ b - 3c = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{EQUIVALENTE}} \begin{cases} 3a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, por lo tanto, sistema indeterminado. Para resolver el sistema hace falta tomar una variable como parámetro, y expresar las demás variables en función del parámetro.

$$a = \lambda : \begin{cases} b = -3\lambda \\ c = -\lambda \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -3\lambda \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \Re$$

38. Hallar una matriz de 2x2, distinta de I y de –I, cuya inversa coincida con su transpuesta siendo I la matriz identidad.

Solución:

Se pide resolver la ecuación:

$$A^{-1} = A^{t}$$

Para que las operaciones sean más fáciles, es conveniente eliminar A^{-1} de la ecuación. Multiplicando por la izquierda ambos miembros de la ecuación por la matriz A

$$A\cdot A^{-1} = A\cdot A^{t}$$

Teniendo en cuenta las propiedades de el inversa

$$A\cdot A^{t} = I$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

multiplicando el primer miembro

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2 & x\cdot z+y\cdot t \\ z\cdot x+t\cdot y & z^2+t^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

igualando las matrices

$$\begin{cases} 1.1: & x^2+y^2=1 \\ 1.2: & x\cdot z+y\cdot t=0 \\ 2.1: & z\cdot x+t\cdot y=0 \\ 2.2: & z^2+t^2=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{EQUIVALENTE}} \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x\cdot z+y\cdot t=0 \\ z^2+t^2=1 \end{cases}$$

aparece un sistema de ecuaciones no lineales, con más incógnitas que ecuaciones, y por lo tanto, con solución indeterminada (infinitas soluciones).

Dada que el problema solo pide encontrar una matriz que cumpla la relación $A^{-1} = A^t$, el sistema lo resolvemos por tanteo.

Teniendo en cuenta la 1ª y 3ª ecuación se puede establecer los siguientes valores:

$$x^2=y^2=z^2=t^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

para que cumplan además la 2ª ecuación, no pueden tener todos igual signo, sino que estos, los signos, se deben repartir, tres de un tipo y uno de otro. Una solución posible será:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad z=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

quedando la matriz de la forma:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

39. Sean A y B matrices de orden n. Demostrar que si A y B son invertibles, $A\cdot B$ también lo es y que se verifica $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Solución.

Si una matriz tiene inversa, su determinante es distinto de cero. Dicho de otra forma, la condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.

$$|A|\neq 0 \quad y \quad |B|\neq 0$$

para que la matriz $(A\cdot B)$ tenga inversa, su determinante no debe ser nulo. Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes:

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|\neq 0$$

teniendo en cuenta que los determinantes de A y B no son nulos, por tener inversa ambas matrices, tampoco lo será el de $A\cdot B$, por lo que existe la inversa de $A\cdot B$.

Para verificar la segunda afirmación, se comprueba que se trata de una igualdad.

Multiplicando por la izquierda ambos miembros de la ecuación por la matriz B

$$B\cdot(A\cdot B)^{-1} = B\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$$

Teniendo en cuenta que $B\cdot B^{-1} = I$ y que $I\cdot A^{-1} = \cdot A^{-1}$

$$B\cdot(A\cdot B)^{-1} = A^{-1}$$

Multiplicando por la izquierda ambos miembros de la ecuación por la matriz A

$$A\cdot B\cdot(A\cdot B)^{-1} = A\cdot A^{-1}$$

$$(A\cdot B)\cdot(A\cdot B)^{-1} = A\cdot A^{-1}$$

$$I=I$$

40. Comprobar que $A^2 = 2A - I$ siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar A^{-1} y la matriz A^8.

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo cual demuestra que $A^2 = 2A - I$.

Cálculo A^{-1}.

Partiendo de la ecuación $A^2 = 2A - I$, se despeja la matriz I, y en el otro miembro se busca un producto de matrices en el que intervenga A

$$I = 2A - A^2$$

$$I = (2 \cdot I - A) \cdot A$$

multiplicando por la izquierda ambos miembros de la ecuación por A^2

$$I \cdot A^{-1} = (2 \cdot I - A) \cdot A \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = (2 \cdot I - A) \cdot I$$

$$A^{-1} = (2 \cdot I - A)$$

$$A^{-1} = 2I - A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo A^8

A partir de $A^2 = 2A - I$, se calcula A^4

$$A^4 = (A^2) = (2A - I)^2$$

Dado que la matriz I conmuta con cualquier matriz, el binomio $2A - I$ se puede desarrollar por el método de Newton.

$$A^4 = 4A^2 - 4AI + I^2 = 4A^2 - 4A + I$$

Se sustituye A^2 por $2A - I$

$$A^4 = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$$

Volviendo a repetir el procedimiento se calcula A^8

$$A^8 = (A^4)^2 = (4A - 3I)^2 = 16A^2 - 24AI + 9I^2 = 16A^2 - 24A + 9I = 16(2A - I) - 24A + 9I =$$

$$= 8A - 7I = 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 24 & 1 \end{pmatrix}$$

41. Sea A una matriz cuadrada. Si $A^2 + 2A + I = 0$ donde I es la matriz unidad, comprobar que A es invertible.

Solución:

De la igualdad $A^2 + 2A + I = 0$, se despeja la matriz identidad y se iguala a un producto de matrices en el que intervenga la matriz A

$$I = -A^2 - 2A$$

$$I = A \cdot (-A - 2I)$$

Lo cual demuestra por si solo que la matriz A tiene inversa, ya que si el producto de dos matrices es la matriz identidad una es la inversa de la otra. Sí además se quiere llegar a una expresión de A^{-1} en función de A, se multiplican ambos miembros por la izquierda por la matriz A^{-1}

$$A^{-1}\cdot I = A^{-1}\cdot A\cdot(-A-2I)$$

$$A^{-1} = I\cdot(-A-2I)$$

$$A^{-1} = -A-2I$$

42. Si A es una matriz cuadrada de orden nxn, tal que $A^2 = A$, e I es la matriz unidad de orden nxn, ¿Qué matriz es B^2, sí $B = 2A - I$?

Solución:

Dado que la matriz I conmuta con cualquier matriz, el binomio 2A − I se puede desarrollar por el método de Newton.

$$B^2 = (2A-I)^2 = 4A^2 - 4AI + I^2 = 4A - 4A + I = I$$

43. Determinar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ tales que su inversa sea 2I–A, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Se pide buscar una matriz A que cumpla la relación

$$A^{-1} = 2I - A$$

Para evitar tener que trabajar con la matriz A^{-1}, se multiplican ambos miembros de la ecuación por la matriz A y en el mismo orden

$$A\cdot A^{-1} = A\cdot(2I - A)$$

$$I = 2A - A^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ 2b & 2c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab & -ac \\ -bc & 2c-ab-c^2 \end{pmatrix}$$

igualando matrices término a término

$$\begin{cases} 1.1: \quad 1 = -ab \\ 1.2: \quad 0 = -ac \\ 2.1: \quad 0 = -bc \\ 2.2: \quad 1 = 2c - ac - c^2 \end{cases}$$

de la igualdad 1.1, se puede concluir que ni a ni b pueden ser cero, con esta conclusión las igualdades 1.2 y 2.1 nos indican que c debe ser cero. Sustituyendo c por cero en las ecuaciones, el sistema se reduce a una sola ecuación con dos incógnitas a y b.

$$\begin{cases} c = 0 \\ a\cdot b = -1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{-1}{a}: \quad \text{Sí} \quad a = \lambda: \begin{cases} a = \lambda \\ b = \dfrac{-1}{\lambda} \\ c = 0 \end{cases}$$

sustituyendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ -1/\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

44. Calcular los valores del parámetro t para que la inversa de la matriz A=$\begin{pmatrix} t & -2 \\ 5 & -t \end{pmatrix}$, coincida con su opuesta.

Solución:

Se pide resolver la ecuación:

$$A^{-1} = -A$$

Para eliminar la inversa de A de la ecuación, multiplicamos los dos miembros de la igualdad por la matriz A en el mismo orden

$$A^{-1}\cdot A = -A\cdot A$$

Teniendo en cuenta que $A^{-1}\cdot A = I$

$$-A\cdot A = I$$

$$A^2 = -I$$

$$\begin{pmatrix} t & -2 \\ 5 & -t \end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t & -2 \\ 5 & -t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t & -2 \\ 5 & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t^2-10 & 0 \\ 0 & -10+t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

igualando

$$t^2 - 10 = -1 : \ t^2 = 9 : \ t = \pm 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} : \quad ó \quad A' = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

45. Siendo las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobar la igualdad: $(A\cdot B)^t = \cdot B^t \cdot A^t$

Solución:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

46. Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 4 \\ 6 & -5 & -6 & 12 \\ 3 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ verifica $A^2 = A$ (no es preciso comprobarlo), determinar un valor no nulo del número real λ tal que $(\lambda A - I)^2 = I$, siendo I la matriz identidad.

Solución:

Dado que las dos matrices que forman el binomio (A,I), conmutan entre si, el binomio se puede desarrollar por el método de Newton.

$$(\lambda A - I)^2 = \lambda^2 A^2 - 2\lambda AI + I^2 = I$$

teniendo en cuenta que $A^2 = A$, $2\lambda AI = 2\lambda A$ y que $I^2 = I$

$$\lambda^2 A - 2\lambda A + I = I$$

simplificando y sacando factor común de A

$$A \cdot (\lambda^2 - 2\lambda) = 0$$

Dado que A no es cero, la única forma de que se cumpla la igualdad es

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 : \ \lambda \cdot (\lambda - 2) = 0 : \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda - 2 = 0 : \ \lambda = 2 \end{cases}$$

47. Para cada numero entero n, se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{pmatrix}, \ x \in \Re$$

a) Compruébese que $A_n \cdot A_m = A_{n+m}$.
b) Como aplicación de lo anterior, calcúlese A_n^{-1}.

Solución:

a)

$$A_n \cdot A_m = \begin{pmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos mx & \operatorname{sen} mx \\ -\operatorname{sen} mx & \cos mx \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos nx \cdot \cos mx + \operatorname{sen} nx \cdot (-\operatorname{sen} mx) & \cos nx \cdot \operatorname{sen} mx + \operatorname{sen} nx \cdot \cos mx \\ -\operatorname{sen} nx \cdot \cos mx + \cos nx \cdot (-\operatorname{sen} mx) & -\operatorname{sen} nx \cdot \operatorname{sen} mx + \cos nx \cdot \cos mx \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos nx \cdot \cos mx - \operatorname{sen} nx \cdot \operatorname{sen} mx & \operatorname{sen} nx \cdot \cos mx + \cos nx \cdot \operatorname{sen} mx \\ -(\operatorname{sen} nx \cdot \cos mx + \cos nx \cdot \operatorname{sen} mx) & \cos nx \cdot \cos mx - \operatorname{sen} nx \cdot \operatorname{sen} mx \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n+m) \cdot x & \operatorname{sen}(n+m) \cdot x \\ -\operatorname{sen}(n+m) \cdot x & \cos(n+m) \cdot x \end{pmatrix} = A_{m+n}$$

b) Suponiendo que la inversa de la matriz An deberá de la forma de la matriz Am, su producto dará una matriz de tipo An×m, la cual, deberá identificarse con la matriz identidad

$$A_{m+n}=\begin{pmatrix}\cos(n+m)\cdot x & \operatorname{sen}(n+m)\cdot x\\ -\operatorname{sen}(n+m)\cdot x & \cos(n+m)\cdot x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

identificando

$$\begin{cases}1.1: & \cos(n+m)\cdot x=1\\ 1.2: & \operatorname{sen}(n+m)\cdot x=0\\ 2.1: & -\operatorname{sen}(n+m)\cdot x=0\\ 2.2: & \cos(n+m)\cdot x=1\end{cases}$$

de lo que se deduce:

$$\begin{cases}n+m=0\\ \text{ó}\\ x=0\end{cases}$$

considerando la primera solución

$$m=-n$$

por lo que la inversa de An será

$$A_n^{-1}=\begin{pmatrix}\cos(-nx) & \operatorname{sen}(-nx)\\ -\operatorname{sen}(-nx) & \cos(-nx)\end{pmatrix}=\overset{\text{ANG. OPUESTOS}}{\begin{Bmatrix}\cos(-nx)=\cos nx\\ \operatorname{sen}(-nx)=-\operatorname{sen} nx\end{Bmatrix}}=\begin{pmatrix}\cos nx & -\operatorname{sen} nx\\ \operatorname{sen} nx & \cos nx\end{pmatrix}$$

48.

a) Determinar los valores del parámetro real λ para los que tiene solución única la ecuación matricial

$AX = B$, siendo $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\ \lambda&1&-1\\ 0&2&-1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$

b) Resolver dicha ecuación matricial para $\lambda = 0$.

Solución:

a) Para que la solución de la ecuación sea única la matriz A debe ser regular, es decir que admita inversa. En el caso de que admita inversa la ecuación se despeja multiplicando los dos términos de la ecuación por A^{-1} por la izquierda (premultiplicar):

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$$
$$I\cdot X=A^{-1}\cdot B$$
$$X=A^{-1}\cdot B$$

La condición <u>necesaria y suficiente</u> para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\ \lambda&1&-1\\ 0&2&-1\end{vmatrix}=\{F_2=F_2-F_3\}=\begin{vmatrix}1&1&0\\ \lambda&-1&0\\ 0&2&-1\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&1\\ \lambda&-1\end{vmatrix}=-1\cdot(-1-\lambda)=1+\lambda=0;\ \lambda=-1$$

Discusión:

Si $\lambda\neq-1$, $|A|\neq0$ y por lo tanto la matriz A es regular y la ecuación tiene solución única

Si $\lambda=-1$, $|A|=0$ la matriz A es regular y la ecuación ó no tiene solución ó tiene infinitas soluciones

b) $$X=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&2&-1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\0&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&-1&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$$

Calculo de la inversa:

$$A^{-1}=\frac{(\operatorname{adj}A)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t}{1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

49. Hallar todos los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A no tiene inversa. $A=\begin{pmatrix}a & a & a\\ a & 2 & a\\ a & a & 3\end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} para a = 1, si existe.

Solución:

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero

$$\begin{vmatrix}a & a & a\\ a & 2 & a\\ a & a & 3\end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 1 & 2 & a\\ 1 & a & 3\end{vmatrix}=\begin{Bmatrix}F_2=F_2-F_1\\ F_3=F_3-F_1\end{Bmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 0 & 2-a & 0\\ 0 & 0 & 3-a\end{vmatrix}=a\cdot(2-a)\cdot(3-a)=0:\begin{cases}a=0\\ a=2\\ a=3\end{cases}$$

Discusión

Si a = 0, 2, 3. La matriz A no tiene inversa

Si a ≠ 0, 2, 3. La matriz A tiene inversa

Inversa de A cuando a = 1

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}5/2 & -1 & -1/2\\ -1 & 1 & 0\\ -1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

50. Estudiar el rango de la matriz A, según los valores de los parámetros a y b.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a & 1\\ 2 & -b & 4 & 2\\ b & -1 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

Solución:

Se define el rango de una matriz como el número de vectores fila ó vectores columna linealmente independientes. El rango de una matriz es menor o igual que la menor de sus dimensiones, y coincide con la orden del mayor *menor* distinto de cero que exista en la matriz.

Se busca un menor de orden dos que no contenga parámetros y que sea distinto de cero. Existen dos:

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix}=-2\neq 0 \quad y \quad \begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-14\neq 0$$

los cuales aseguran que el rango de A es dos independientemente de los valores que tomen los parámetros a y b.

Se Toma como referencia el primero de ellos por que al orlarlo, aparece un menor de orden tres con un solo parámetro, mientras que con el segundo, los dos menores orlados de orden tres contienen ambos los dos parámetros.

Orlar menores. Orlar un menor de orden n es obtener todos los menores de orden n+1 que contengan al menor de orden n, y solamente aquellos que lo contengan.

Los menores que no lo contienen son combinaciones lineales de los que lo contienen.

Orlando el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}$ se obtienen los menores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -b & 2 \\ b & -1 & 3 \end{vmatrix} = b^2 - b - 6 = (b+2)\cdot(b-3)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -b & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = a\cdot(3b-2) - b + 14$$

igualando a cero ambos menores

$$\begin{cases} (b+2)\cdot(b-3) = 0 : \begin{cases} b = -2 \\ b = 3 \end{cases} \\ a\cdot(3b-2) - b + 14 = 0 : \quad a = \dfrac{b-14}{3b-2} \end{cases}$$

Discusión:

i) Sí $b \neq -2, 3$ y $\forall a \in \Re$, rg A = 3

ii) Sí $b = -2$: $a = \dfrac{-2-14}{3\cdot(-2)-2} = 2$

  i. Sí $b = -2$ y $a = 2$, rg A =2
  ii. Sí $b = -2$ y $a \neq 2$, rg A = 3

iii) Sí $b = 3$: $a = \dfrac{3-14}{3\cdot 3-2} = -\dfrac{11}{7}$

  i. Sí $b = 3$ y $a = -\dfrac{11}{7}$, rg A =2
  ii. Sí $b = 3$ y $a \neq -\dfrac{11}{7}$, rg A = 3

51. Discutir razonadamente en función de a y b el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 12 & 6 \\ b & 1 & 4 & 2 \\ a+b & 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$

Solución:

El rango de una matriz es el número de vectores fila o vectores columna linealmente independientes:

$\text{rg}\begin{pmatrix} a & 3 & 12 & 6 \\ b & 1 & 4 & 2 \\ a+b & 4 & 16 & 8 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \\ a+b & 4 \end{pmatrix}$, por ser $C_3 = 4\,C_2$ y $C_4 = 2C_2$

$\text{rg}\begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \\ a+b & 4 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, por ser $C_3 = C_1 + C_2$

$$\begin{vmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{vmatrix} = a - 3b \; ; \quad \begin{vmatrix} a & 3 \\ a+b & 4 \end{vmatrix} = 4a - 3\cdot(a+b) = a - 3b$$

Discusión

i. Si $a - 3b = 0 \Rightarrow a = 3b$, el rango de la matriz será 1.
ii. Si $a - 3b \neq 0 \Rightarrow a \neq 3b$, el rango de la matriz será 2.

52. Dada la matriz A=$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$: Calcular A² y A^{-1}.

Solución.

$$A^2=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}=$$

$$=25\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta el resultado de A² = 25·I:

$$A^2 = A\cdot A = 25\cdot I$$

Multiplicando los dos miembros por A^{-1} por la derecha:

$$A\cdot A\cdot A^{-1} = 25\cdot I\cdot A^{-1}$$

$$\text{dado que:}\begin{cases} A\cdot A^{-1}=I \\ I\cdot A^{-1}=A^{-1} \end{cases}$$

$$A = 25\cdot A^{-1}$$

Despejando la inversa de A

$$A^{-1}=\frac{1}{25}\cdot A=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2/25 & 4/25 & 2/25 & 1/25 \\ 4/25 & 2/25 & 1/25 & -2/25 \\ 2/25 & 1/25 & -2/25 & 4/25 \\ 1/25 & -2/25 & 4/25 & 2/25 \end{pmatrix}$$

53. Siendo A una matriz cuadrada de tercer orden y A^t su transpuesta, demostrar que $A+A^t$ es una matriz simétrica. Obtener la matriz inversa de ($A+A^t$) donde $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solución.

Si $A + A^t$ es una matriz simétrica, entonces debe de cumplirse:

$$A+A^t=(A+A^t)^t$$

teniendo en cuenta las propiedades de la transposición de matrices:

$$(A+B)^t=A^t+B^t$$

$$A+A^t=(A+A^t)^t=A^t+(A^t)^t=A^t+A$$

Dado que la suma de matrices es conmutativa, se cumple que la suma de una matriz con su transpuesta es una matriz simétrica.

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(A + A^t)^{-1} = \frac{\left(\operatorname{adj}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right)^t}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t}{-18} = \frac{\begin{pmatrix} 12 & -12 & -6 \\ -12 & 3 & 6 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}^t}{-18} = \frac{\begin{pmatrix} 12 & -12 & -6 \\ -12 & 3 & 6 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}}{-18} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

54. Hallar la matriz X que satisface la ecuación AX = BA, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Solución.

Se pide resolver la ecuación matricial:

$$A \cdot X = B \cdot A$$

Se despeja la matriz X teniendo en cuenta las propiedades de la multiplicación y de la inversa:

- la multiplicación no es conmutativa.
- $A \cdot A^{-1} = I$
- $I \cdot X = X$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \cdot A$$
$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B \cdot A$$
$$X = A^{-1} \cdot B \cdot A$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculo de la inversa:

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\left(\mathrm{adj}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}\right)^t}{\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&0&3\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\2&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&2\\0&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\2&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}3&2&-2\\0&-1&0\\-2&-1&1\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}3&0&-2\\2&-1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}}{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3&0&2\\-2&1&1\\2&0&-1\end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$X=\begin{pmatrix}-3&0&2\\-2&1&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&2\\-1&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-3&7\\0&-2&6\\1&2&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-3&14\\12&-2&16\\-7&2&-8\end{pmatrix}$$

55. ¿Tiene inversa siempre una matriz diagonal de orden 4?. Justifica la respuesta. ¿Tiene inversa la matriz B? En caso de que la tenga calcúlese.

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&b&0\\0&0&0&c\end{pmatrix}: a, b, c\in\Re$$

Solución.

a) Si. Si una matriz es diagonal, todos sus términos son nulos excepto los de la diagonal, y por tanto, la única permutación no nula es la de la diagonal no nula, y su determinante será el producto de los términos de la diagonal o su opuesto, según sea la diagonal principal o la secundaria respectivamente. Si el determinante de una matriz no es nulo, la matriz tendrá inversa.

b) $|B| = abc \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$

c) $$B^{-1}=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&a&0&0&0&1&0&0\\0&0&b&0&0&0&1&0\\0&0&0&c&0&0&0&1\end{array}\right)=\left\{\begin{array}{l}E_2=\frac{1}{a}E_2\\E_3=\frac{1}{b}E_3\\E_4=\frac{1}{c}E_4\end{array}\right\}=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1/a&0&0\\0&0&1&0&0&0&1/b&0\\0&0&0&1&0&0&0&1/c\end{array}\right)$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1/a&0&0\\0&0&1/b&0\\0&0&0&1/c\end{pmatrix}$$

56. Calcula la inversa de la matriz A en función de **a** y **b**. $A=\begin{pmatrix}2a & b & 1\\ 2 & ab & 1\\ 2 & b & a\end{pmatrix}$

Solución.

$$A^{-1}=\frac{(\mathrm{adj}A)^t}{|A|}=\frac{\left(\mathrm{adj}\begin{pmatrix}2a & b & 1\\ 2 & ab & 1\\ 2 & b & a\end{pmatrix}\right)^t}{\begin{vmatrix}2a & b & 1\\ 2 & ab & 1\\ 2 & b & a\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}ab & 1\\ b & a\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & a\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & ab\\ 2 & b\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}b & 1\\ b & a\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2a & 1\\ 2 & a\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2a & b\\ 2 & b\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}b & 1\\ ab & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2a & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2a & b\\ 2 & ab\end{vmatrix}\end{pmatrix}}{2\cdot b\cdot\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}a^2b-b & -2(a+1) & 2b(1-a)\\ -b(a-1) & 2(a^2-1) & -2b(a-1)\\ b(1-a) & -2(a-1) & 2b(a^2-1)\end{pmatrix}^t}{2b(a^3-3a+2)}=$$

$$\frac{\begin{pmatrix}b(a^2-1) & -b(a-1) & b(1-a)\\ -2(a-1) & 2(a^2-1) & -2(a-1)\\ 2b(1-a) & -2b(a-1) & 2b(a^2-1)\end{pmatrix}}{2a\cdot(a-1)^2\cdot(a+2)}=\begin{pmatrix}\frac{a+1}{2(a-1)(a+2)} & -\frac{1}{2(a-1)(a+2)} & -\frac{1}{2(a-1)(a+2)}\\ -\frac{1}{b(a-1)(a+2)} & \frac{a+1}{b(a-1)(a+2)} & -\frac{1}{b(a-1)(a+2)}\\ -\frac{1}{(a-1)(a+2)} & -\frac{1}{(a-1)(a+2)} & \frac{a+1}{(a-1)(a+2)}\end{pmatrix}$$

57. Estudiar el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}a & -1 & a-1 & 3\\ 0 & a-2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & a+3 & -1\\ 0 & -a & 0 & a\end{pmatrix}$ según los valores de **a**.

Solución:

Rango de una matriz: número de vectores fila o vectores columna linealmente independientes. Coinciden con el rango del mayor menor distinto de cero que exista en la matriz.
Para estudiar el rango de la matriz A, hay que calcular su determinante en función del parámetro a.

$$|A|=\begin{vmatrix}a & -1 & a-1 & 3\\ 0 & a-2 & -2 & 1\\ 0 & a-2 & a+3 & -1\\ 0 & -a & 0 & a\end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante de la primera columna, se convierte en un determinante de orden 3.

$$|a|=a\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}a-2 & -2 & 1\\ 1 & a+3 & -1\\ -a & 0 & a\end{vmatrix}=\{C_1=C_1+C_3\}=a\cdot\begin{vmatrix}a-1 & -2 & 1\\ 0 & a+3 & -1\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}=a(a-1)(a+3)a$$

por ser una matriz triangular:

$$|A|=a^2(a-1)(a+3)$$

igualando a cero:

$$a^2(a-1)(a+3)=0\Rightarrow\begin{cases}a^2=0; & a=0\\ a-1=0; & a=1\\ a+3=0; & a=-3\end{cases}$$

Discusión:

I. Si a ≠ 0, 1, -3 $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rgA} = 4$

II. Si a = 0 $\Rightarrow$ rg A < 4

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2-1-18-(-6-3-2) = -10 \neq 0 \Rightarrow \text{rgA} = 3$$

III. a = 1

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{rg} < 4$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rgA} \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rgA} = 3$$

IV. a = -3

$$\text{rg}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{rg} < 4$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Rightarrow \text{rgA} \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{rgA} = 3$$

58. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ demostrar que A^3 es la matriz nula, y que si I es la matriz unidad de orden 3, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de la matriz I–A.

Solución.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El producto de una matriz por su inversa es la matiz identidad.

$(I + A + A^2) \cdot (I - A) = (I \cdot I - I \cdot A + A \cdot I - A \cdot A + A^2 \cdot I - A^3 = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I$

por lo tanto se puede escribir:

$$(I + A + A^2)\,(I - A) = I$$

multiplicando los dos términos de la ecuación por $(A - I)^{-1}$ por la derecha:

$$(I + A + A^2) \cdot (I - A) \cdot (I - A)^{-1} = I \cdot (I - A)^{-1}$$

teniendo en cuenta: $\begin{cases} (I-A)(I-A)^{-1} = I \\ I\cdot(A-I)^{-1} = (A-I)^{-1} \end{cases}$ queda:

$$I + A + A^2 = (I - A)^{-1}$$

Como se pedía demostrar.

59. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Compruebe que $(A+I)^2=0$, siendo I la matriz identidad y 0 la matriz nula. Justifica que A es invertible y obtener A^{-1} y A^2 en función de A.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $(A + I)^2 = 0 \Rightarrow A^2 + 2A + I^2 = 0$ ya que las matrices A e I conmutan.

Si $A^2 + 2A + I = 0$:

$$A^2 = -2A - I = -2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $A^2 + 2A + I = 0 \Rightarrow -A^2 - 2A = I \Rightarrow A\,(-A - 2I) = I \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot (-A - 2I) = A^{-1} \cdot I \Rightarrow I \cdot (-A - 2I) = A^{-1}$

$$A^{-1} = -A - 2I = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

60. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con a, b, c y d pertenecientes a $\Re$ y que la matriz A cumple las propiedades $A \cdot A = I$ y $\det(A) = 1$, siendo I la matriz identidad, calcular los coeficientes de la matriz A.

Solución:

- $A \cdot A = I;$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

identificando por términos:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.1. & a^2+bc=1 \\ 2.1. & ab+bd=0 \\ 1.2. & ac+cd=0 \\ 2.2. & bc+d^2=1 \end{array}\right\}$$

- $|A|=1$; $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=1$; $\quad ad-bc=1$

con las dos ecuaciones se puede plantear un sistema de cinco ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a^2+bc=1 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=1 \\ ad-bc=1 \end{array}\right\}$$

de la quinta ecuación se despeja el producto bc para sustituirlo en la primera y cuarta.

$$\left.\begin{array}{l} a^2+ad-1=1 \\ (a+d)\cdot b=0 \\ (a+d)\cdot c=0 \\ ad-1+d^2=1 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} a(a+d)=2 & \\ b(a+d)=0 & a+d\neq 0 \\ c(a+d)=0 & a\neq 0 \\ d(a+d)=2 & d\neq 0 \end{array}$$

dividiendo la 1ª y la 4ª ecuación:

$$\frac{a}{d}=1\Rightarrow a=d$$

por lo tanto para que la 2ª y la 3ª ecuación se cumplan:

$$b=c=0$$

$$\begin{array}{l} a\cdot d=1 \\ \dfrac{a}{b}=1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm 1 \\ b=\pm 1 \end{cases}; \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La otra posibilidad será la matriz identidad.

61. (Puntuación máxima: 2 puntos) Sea A una matriz cuadrada y sea I la matriz unidad. Pruébese que sí $A^2 + 5A = I$, entonces A es una matriz regular. Recuérdese que A es regular si admite función inversa o si tiene determinante no nulo)

Solución

Se pide demostrar que la matriz A es regular, y para ello nos recuerdan que toda matriz regular es invertible. La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa, es que su determinante no sea nulo. **Matriz regular**, matriz cuadrada cuyo determinante es distinto de cero.

Partiendo de la ecuación matricial que cumple A se demuestra la existencia de la matriz A^{-1}, llegando a dar una expresión de está última en función de la matriz A.

$$A^2 + 5A = I$$

Sacando factor común de A por la izquierda.

$$A\cdot(A+5I) = I$$

Multiplicando por la izquierda ambos miembros de la igualdad por A^{-1}.

$$A^{-1}\cdot A\cdot(A+5I) = A^{-1}\cdot I$$

Teniendo en cuenta que: $A^{-1}\cdot A = I$, $A^{-1}\cdot I = I$

$$I\cdot(A+5I) = A^{-1}$$

$$A^{-1} = A + 5I$$

62. Calificación máxima: 2 puntos. Sea $M = \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$, siendo r y s dos números reales tales que $r \cdot s \neq 1$. Calcular M^2, M^3, M^4, y M^{2k} para $k \in N$.

Solución

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot s & 0 \\ 0 & r \cdot s \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} r \cdot s & 0 \\ 0 & r \cdot s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \cdot s \\ r \cdot s^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \cdot s \\ r \cdot s^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 \cdot s^2 & 0 \\ 0 & r^2 \cdot s^2 \end{pmatrix}$$

por inferencia se puede deducir:

$$M^{2K} = \begin{pmatrix} r^K \cdot s^K & 0 \\ 0 & r^K \cdot s^K \end{pmatrix}$$

63. Calificación máxima: 2 puntos.

a) Hallar razonadamente los valores del parámetro p para los que la matriz A tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

b) Hallar la inversa para p = 2

Solución

a) La condición necesaria y suficiente para que una matriz de orden n×n tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{vmatrix} = p \cdot (p+1) \cdot (p-1)$$

i. Sí $p \neq 0, \pm 1$ el $|A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

ii. Sí $p = 0, \pm 1$ el $|A| = 0 \Rightarrow NO \exists A^{-1}$

b) Sí p =2; $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 2 \cdot (2+1) \cdot (2-1) = 6$

$$A^{-1} = \frac{(\text{adj}\, A)^t}{|A|} = \frac{\left(\text{adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^t}{6} = \frac{\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t}{6} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}^t}{6} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$