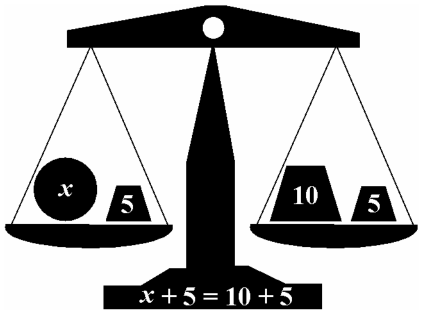
ECUACIONES Y SISTEMAS

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.



Puedes observar en la figura que los platillos de la balanza están equilibrados, de modo que se puede establecer una relación de igualdad de masas entre los objetos. Se obtiene así una *ecuación*.

En este caso se tiene una *ecuación de primer grado,* es decir, en ella la *incógnita* tiene por exponente la unidad. También los son las siguientes:

$3x = 12$	el exponente de la x es 1
$3m + 7 = 2m - 6$	el exponente de la m es 1
$6t + 7 - 2t = 3t + 1$	el exponente de la t es 1

> Una ***ecuación*** es una igualdad entre letras y números relacionados por las operaciones aritméticas. Las letras en este caso se llaman ***incógnitas.***
>
> Una ***ecuación de primer grado con una incógnita*** es una ecuación que, después de haber realizado las operaciones indicadas, tiene una incógnita cuyo exponente es 1.

En una ecuación, las incógnitas pueden tomar cualquier valor numérico. Dando valores a las incógnitas se puede comprobar si la ecuación es cierta o falsa para esos valores.

Ejemplo. $3x + 3 = 5x - 1$

$x = 1$
Primer miembro: $3 \cdot 1 + 3 = 6$
Segundo miembro: $5 \cdot 1 - 1 = 4$
Es falsa para $x = 1$ porque $6 \neq 4$

$x = 2$
Primer miembro: $3 \cdot 2 + 3 = 9$
Segundo miembro: $5 \cdot 2 - 1 = 9$
Es cierta para $x = 2$ ya que $9 = 9$

> Las ***soluciones*** o ***raíces*** de una ecuación son los valores que pueden tomar las incógnitas, tales que al sustituirlos en la ecuación hacen que la igualdad sea cierta.
>
> ***Resolver una ecuación*** es hallar las soluciones o raíces de la misma.
>
> Dependiendo de las soluciones, una ecuación puede ser:
>
> - ***Compatible*** si la ecuación tiene soluciones. Si el número de soluciones es finito, se dice que la ecuación es ***compatible determinada,*** y si el número de soluciones es infinito, la ecuación es ***compatible indeterminada.***
> - ***Incompatible*** o ***imposible*** cuando la ecuación no tiene solución.

EJERCICIOS

1. Comprueba si los valores que se indican son soluciones de las ecuaciones correspondientes.

   a) $x = 3$ de $2x + 3 = 5x - 1$

   b) $x = 4$ de $\frac{x}{2} + 1 = x - 1$

   c) $x = 10$ de $3(x - 2) = 2x + 4$

   d) $x = -1$ de $\frac{5x - 2}{10} + 3 = 2x + 1$

2. ECUACIONES EQUIVALENTES. REGLAS DE EQUIVALENCIA.

Fácilmente podemos comprobar que las ecuaciones $x - 3 = 2$ y $4x = x + 15$ tienen ambas por solución $x = 5$; diremos que se trata de ecuaciones *equivalentes*.

> Dos ecuaciones son ***equivalentes*** si tienen las mismas soluciones.

Para resolver una ecuación se transforma ésta en otra más sencilla que sea equivalente a la dada, es decir, que tenga las mismas soluciones. Esto se consigue utilizando las dos propiedades siguientes:

> **1. Propiedad de la suma**
>
> Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número o expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.
>
> $$\boldsymbol{A = B \Leftrightarrow A \pm C = B \pm C}$$
>
> **2. Propiedad del producto**
>
> Si a los dos miembros de una ecuación se los multiplica o divide por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.
>
> $$\boldsymbol{A = B \Leftrightarrow A \cdot C = B \cdot C,\ C \neq 0}$$

En la práctica suelen utilizarse las reglas siguientes, que son consecuencia de estas propiedades:

> **1. Regla de trasposición de términos**
>
> En una ecuación se puede pasar un número o expresión algebraica de las que aparecen en la ecuación de un miembro a otro cambiándole el signo, y se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.
>
> $$\boldsymbol{A + X = B + X \Leftrightarrow A = B}$$
>
> **2. Regla de trasposición de factores o divisores**
>
> En una ecuación se puede pasar un número distinto de cero de un miembro a otro multiplicando si estaba dividiendo o dividiendo si estaba multiplicando, y se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.
>
> $$\boldsymbol{A \cdot C = B \cdot C \Leftrightarrow A = B,\ C \neq 0}$$

Ejemplo. Aplicando las anteriores propiedades, vamos a resolver las siguientes ecuaciones.

- $2x - 5 = x + 7$

  Suma 5 a los dos miembros: $2x = x + 12$

  Resta x a los dos miembros: $x = 12$

  La solución es: $x = 12$

- $3x - 7 = 41$

  Suma 7 a los dos miembros: $3x = 48$

  Divide por 3 los dos miembros: $x = 16$

  La solución es: $x = 16$

EJERCICIOS

2. Aplica las reglas de equivalencia y resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2x - 5 = x + 41 - 5$ b) $3x + 1 = x + 7$ c) $3x + 23 = 2x + 59$

d) $2x + \dfrac{5x}{3} = 66$ e) $5x + 8 = 8x + 2$ f) $9 + 9x = 117 - 3x$

g) $21 - 7x = 41x - 123$ h) $500 - 24x = -4 - 3x$

3. RESOLUCIÓN GENERAL DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

Para resolver este tipo de ecuaciones utilizamos las operaciones con expresiones algebraicas y las reglas de trasposición que transforman la ecuación dada en otra equivalente. Esta resolución la sistematizamos siguiendo los pasos que figuran a continuación.

1º. Operamos en ambos miembros suprimiendo los paréntesis que contengan.
2º. Eliminamos los denominadores multiplicando los dos miembros por el m.c.m. de los denominadores.
3º. Trasponemos términos: los términos que contenga la variable a un miembro y los términos independientes al otro.
4º. Reducimos términos semejantes en ambos miembros y llegamos a una ecuación del tipo $ax = b$.
5º. Despejamos la incógnita.

Ejemplo. Resolvamos la ecuación $\frac{x}{3} - \frac{3(x-2)}{5} = 2\left(\frac{x-1}{3}\right)$

- Operamos en ambos miembros suprimiendo los paréntesis: $\frac{x}{3} - \frac{3x-6}{5} = \frac{2x-2}{3}$
- Eliminamos denominadores, multiplicando ambos miembros por el m.c.m. (3, 5, 3) = 15:

$$5x - 3(3x - 6) = 5(2x - 2)$$

- Nuevamente operamos en ambos miembros eliminando los paréntesis: $5x - 9x + 18 = 10x - 10$
- Trasponemos términos: $5x - 9x - 10x = -10 - 18$
- Reducimos términos semejantes: $-14x = -28$
- Despejamos la incógnita: $x = \frac{-28}{-14} = 2 \Rightarrow$ solución $x = 2$

3.1. Número de soluciones de una ecuación de primer grado.

Toda ecuación de primer grado con una incógnita se puede transformar, mediante los pasos indicados anteriormente, en otra equivalente del tipo $ax = b$.

Dependiendo de estos coeficientes a y b, una ecuación podrá o no, tener soluciones. Veamos detenidamente los siguientes ejemplos.

- $\mathbf{180 - 3x = x + 12} \Leftrightarrow -3x - x = 12 - 180 \Leftrightarrow -4x = -168 \Leftrightarrow x = 42$. Esta ecuación tiene una única solución.
- $\mathbf{7(x + 2) - 5x = 2x + 14} \Leftrightarrow 7x + 14 - 5x = 2x + 14 \Leftrightarrow 7x - 5x - 2x = 14 - 14 \Leftrightarrow 0x = 0$. Esta ecuación tiene infinitas soluciones, siendo cualquier número real solución de la misma.
- $\mathbf{2(x + 2) = 2x + 7} \Leftrightarrow 2x + 4 = 2x + 7 \Leftrightarrow 2x - 2x = 7 - 4 \Leftrightarrow 0x = 3$. Esta ecuación no tiene soluciones.

Número de soluciones de la ecuación de primer grado con una incógnita

1º. Se transforma la ecuación dada en una equivalente del tipo $ax = b$.

2º. Si $a \neq 0$, $ax = b$, la ecuación tiene una **única solución:** $x = b/a$, luego es ***compatible determinada.***

Si $a = b = 0$, $0x = 0$, la ecuación tiene **infinitas soluciones** (cualquier número real es solución), se trata entonces de una ecuación ***compatible indeterminada.***

Si $a = 0$ y $b \neq 0$, $0x = b$, la ecuación **no tiene solución,** siendo una ecuación ***incompatible.***

EJERCICIOS

3. Resuelve las siguientes ecuaciones.
   a) $3x + 100 = 5(200 - 3x)$
   b) $5(20 - x) = 4(2x - 1)$
   c) $-10x + 8 = 2(4 - 5x)$
   d) $9(x - 2) - 3(x - 4) = 3(16 - 7x)$
   e) $6 - (3x + 1) = 5 - 3(x - 2)$
   f) $4 - 2(x - 1) = 3(2 - x) - 10$
4. Resuelve las siguientes ecuaciones.
   a) $\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}-\frac{5x}{6}=15$ b) $\frac{x-1}{1}-\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3}=0$ c) $\frac{10x+3}{6}-\frac{3x-1}{10}=\frac{x}{2}-1$
5. Resuelve las siguientes ecuaciones.
   a) $\frac{3x-17}{8}-\frac{1-4x}{13}=\frac{1-x}{4}-\frac{9-x}{6}$
   b) $\frac{x}{3}+3-\frac{2x}{5}=\frac{1}{5}\left(-\frac{x}{3}+15\right)$
   c) $\frac{2x-3}{18}-\frac{2-4x}{27}=\frac{5}{3}-\frac{2x-1}{6}$
   d) $\frac{5x-1}{7}-\frac{7x+19}{20}=\frac{x+11}{14}+\frac{3x-4}{5}$
   e) $\frac{2x-1}{3}-\frac{x-3}{4}=\frac{5x}{12}+\frac{7}{6}$
   f) $\frac{x}{6}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=\frac{2x-1}{6}$
6. Resuelve las siguientes ecuaciones.
   a) $\frac{30-x}{20+x}=\frac{5}{4}$ b) $\frac{9+x}{19-x}=\frac{4}{3}$

4. Sistemas de ecuaciones. Métodos de resolución.

4.1. Ecuaciones con dos incógnitas.

Una ***ecuación de primer grado con dos incógnitas*** es una ecuación del tipo:

$$ax + by = c$$

Los números ***a*** y ***b*** se llaman ***coeficientes*** de las ***incógnitas x*** e ***y***.

El número ***c*** se llama ***término independiente.***

En una ecuación de este tipo, al dar valores a una de las incógnitas se obtiene el valor de la otra. Así, por ejemplo, en la ecuación $2x + y = 30$ tenemos:

para $x = 1$, despejando la incógnita y se tiene: $2 \cdot 1 + y = 30 \Rightarrow y = 28$

para $x = 2$, despejando la incógnita y se tiene: $2 \cdot 2 + y = 30 \Rightarrow y = 26$

En la tabla siguiente se muestran algunos de los posibles valores de x e y:

x	1	2	3	5	10	12	…
y	28	26	24	20	10	6	…

Cada uno de estos valores es una ***solución de la ecuación.*** Las ecuaciones con dos incógnitas tienen infinidad de soluciones.

EJERCICIOS

7. Varias personas han ido a merendar a una cafetería. Piden 4 bocadillos y 5 refrescos; deben pagar 7'20 euros. Encuentra posibles valores del precio de cada bocadillo y cada refresco.

4.2. Sistemas de ecuaciones.

- Un ***sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas*** o ***sistema de ecuaciones lineales*** es un conjunto de dos ecuaciones en las que las incógnitas representan los mismos valores.

  Los sistemas de ecuaciones se escriben así: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

- ***Resolver un sistema de ecuaciones*** es hallar los valores posibles de x e y que **verifican a la vez las dos ecuaciones.**

Ejemplo. Halla dos números que sumen 6 y cuya diferencia sea 4.

Llamamos x e y a dichos números y traducimos cada una de las condiciones del enunciado:

la suma de los dos números es 6: $x + y = 6$

la diferencia de ambos es 4: $x - y = 4$

Al considerar simultáneamente las dos condiciones, tenemos un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$

En las siguientes tablas aparecen soluciones de cada una de las ecuaciones:

x	–1	0	1	**5**	…
$y = 6 - x$	7	6	5	**1**	…

x	–1	0	1	**5**	…
$y = x - 4$	–5	–4	–3	**1**	…

La pareja de valores $x = 5$, $y = 1$ es la solución del sistema.

Una ***solución*** de un sistema de ecuaciones es un par de números que toman las incógnitas para los cuales se **verifican a la vez ambas ecuaciones.**

Dos sistemas son ***equivalentes*** si tienen las mismas soluciones.

Dependiendo de las soluciones, un sistema puede ser:

- ***Compatible*** si el sistema tiene solución. Si tiene una única solución, se dice que el sistema es ***compatible determinado,*** y si tiene infinitas soluciones, el sistema es ***compatible indeterminado.***
- ***Incompatible*** o ***imposible*** si el sistema no tiene soluciones.

Para resolver un sistema de ecuaciones podemos utilizar varios métodos, siendo los más habituales los que vamos a estudiar a continuación: ***métodos de sustitución, igualación y reducción.***

4.3. Método de sustitución.

Para resolver un sistema por el *método de sustitución* seguimos los siguientes pasos:

1º. Se despeja una de las incógnitas en una cualquiera de las ecuaciones.

2º. Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación, dando lugar a una ecuación de primer grado con una incógnita, que al resolverla nos permite hallar el valor de una de las incógnitas.

3º. Se halla el valor de la otra incógnita sustituyendo el valor obtenido anteriormente en la expresión primera.

4º. La solución del sistema la forman los valores de ambas incógnitas.

Ejemplo. Resolvamos el sistema $\begin{cases} 5x+3y=7 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$

Despejamos una incógnita en una de las ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x+3y=7 \Leftrightarrow y=\dfrac{7-5x}{3} \quad [\mathrm{I}] \\ 3x-2y=8 \end{cases}$$

Sustituimos la expresión obtenida en la otra ecuación, resultando una ecuación de primer grado:

$$3x-2\left(\frac{7-5x}{3}\right)=8 \Leftrightarrow 3x-\frac{14-10x}{3}=8 \Leftrightarrow 9x-14+10x=24 \Leftrightarrow x=2$$

Sustituimos el valor obtenido en la expresión [I]:

$$[\mathrm{I}]:\; y=\frac{7-5\cdot 2}{3}=-1$$

La solución del sistema es: $x=2,\; y=-1$

Fácilmente podemos comprobar que esta solución verifica ambas ecuaciones del sistema.

4.4. Método de igualación.

Para resolver un sistema por el *método de igualación* seguimos los siguientes pasos:

1º. Se despeja cualquiera de las incógnitas en ambas ecuaciones.
2º. Se igualan las expresiones obtenidas, dando lugar a una ecuación de primer grado con una incógnita, que al resolverla nos permite hallar el valor de una de las incógnitas.
3º. Se halla el valor de la otra incógnita sustituyendo el valor obtenido anteriormente en una de las primeras expresiones.
4º. La solución del sistema la forman los valores de ambas incógnitas.

Ejemplo. Resolvamos nuevamente el sistema $\begin{cases} 5x+3y=7 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$

Despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x+3y=7 \Leftrightarrow x=\dfrac{7-3y}{5} \quad [\mathrm{I}] \\ 3x-2y=8 \Leftrightarrow x=\dfrac{8+2y}{3} \quad [\mathrm{II}] \end{cases}$$

Igualamos las expresiones obtenidas, resultando una ecuación de primer grado:

$$\frac{7-3y}{5}=\frac{8+2y}{3} \Leftrightarrow \frac{3(7-3y)}{15}=\frac{5(8+2y)}{15} \Leftrightarrow 21-9y=40+10y \Leftrightarrow y=-1$$

Sustituimos el valor obtenido en cualquiera de las expresiones [I] o [II]:

$$[\mathrm{II}]:\; x=\frac{8+2\cdot(-1)}{3}=2$$

Por tanto, la solución del sistema es: $x=2,\; y=-1$

4.5. Método de reducción.

Para resolver un sistema por el *método de reducción* seguimos los siguientes pasos:

1º. Elegimos la incógnita que queremos reducir o eliminar y multiplicamos cada ecuación por el número conveniente, de manera que los coeficientes de la incógnita que vamos a reducir sean opuestos.

2º. Sumamos miembro a miembro las ecuaciones obtenidas anteriormente, con lo que se elimina la incógnita elegida. Obtenemos así una ecuación de primer grado con una incógnita con la que hallamos el valor de la otra incógnita.

3º. Obtenemos el valor de la incógnita reducida sustituyendo el valor de la incógnita calculada en una de las ecuaciones iniciales o bien directamente aplicando nuevamente el método de reducción para la otra incógnita.

4º. La solución del sistema la forman los valores de ambas incógnitas.

Ejemplo. Resolvamos el mismo sistema anterior $\begin{cases} 5x+3y=7 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$

Elegimos la incógnita que vamos a eliminar (en este caso la *x*) y multiplicamos cada ecuación por el número conveniente, de manera que los coeficientes de la incógnita elegida resulten opuestos:

$$\begin{cases} 5x+3y=7 & [\text{I}] \\ 3x-2y=8 & [\text{II}] \end{cases} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -3\cdot[\text{I}] \\ 5\cdot[\text{II}] \end{smallmatrix}} \Rightarrow \begin{cases} -15x-9y=-21 \\ 15x-10y=40 \end{cases}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones obtenidas para eliminar la incógnita elegida, resultando una ecuación de primer grado:

$$-19y=19 \Leftrightarrow y=-1$$

Obtenemos el valor de la incógnita reducida sustituyendo el valor obtenido en una de las ecuaciones iniciales o bien repitiendo el proceso anterior para la otra incógnita. Elegimos aquí la primera opción:

$$[\text{I}]:\ 5x+3\cdot(-1)=7 \Leftrightarrow x=2$$

La solución del sistema es: $x=2,\ y=-1$

EJERCICIOS

8. Resuelve los sistemas siguientes por el método que se indica: sustitución (S), igualación (I) y reducción (R).

a) (S)$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$ b) (S)$\begin{cases} 4x-3y=-2 \\ 3x+5y=-16 \end{cases}$ c) (S)$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 6x-4y=7 \end{cases}$

d) (I)$\begin{cases} -5x+4y=2 \\ x=3y \end{cases}$ e) (I)$\begin{cases} 5x+2y=4 \\ 4x-3y=-6 \end{cases}$ f) (I)$\begin{cases} 5x-2y=4 \\ -10x+4y=-8 \end{cases}$

g) (R)$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$ h) (R)$\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$ i) (R)$\begin{cases} 3y-2x=-6 \\ 3x+2y=-4 \end{cases}$

9. Resuelve los sistemas siguientes por el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} x+2y=12 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=2 \\ \dfrac{2x}{3}-\dfrac{y}{2}=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2y+1}{3}=4 \\ \dfrac{3x}{5}-\dfrac{2}{3}=4y \end{cases}$

5. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Llamamos ***ecuación de segundo grado con una incógnita*** a toda ecuación que se puede transformar en otra equivalente del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ siendo el número } a \neq 0$$

Las ***soluciones*** de una ecuación de segundo grado son los valores de x que al sustituirlos en el primer miembro verifican la ecuación.

5.1. Ecuaciones de segundo grado incompletas.

Si en la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ alguno de los coeficientes b o c es cero, se dice que es una ***ecuación incompleta.*** Estas ecuaciones se resuelven directamente.

- Si $b = c = 0$, la ecuación es de la forma $ax^2 = 0$. Se resuelve despejando la incógnita x.
- Si $b = 0$, la ecuación es de la forma $ax^2 + c = 0$. Se resuelve despejando la incógnita x.
- Si $c = 0$, la ecuación es de la forma $ax^2 + bx = 0$. Se resuelve sacando factor común e igualando a cero los factores.

Ejemplo. Resolvamos las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

- $3x^2 = 0$
  - Se divide por 3: $x^2 = 0$
  - Se extrae la raíz cuadrada: $x = \pm\sqrt{0} \Rightarrow x = 0$
- $2x^2 - 8 = 0$
  - Se suma 8: $2x^2 = 8$
  - Se divide por 2: $x^2 = 4$
  - Se extrae la raíz cuadrada: $x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = 2, x = -2$
- $3x^2 - 12x = 0$
  - Se extrae $3x$ como factor: $3x(x - 4) = 0$
  - Se igualan a 0 ambos factores: $3x = 0 \Rightarrow x = 0$; $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

Para resolver el tercer ejemplo se utiliza el siguiente resultado, muy útil en la resolución de algunas ecuaciones:

Si el producto de dos o más factores (números o expresiones algebraicas) es cero, al menos uno de ellos es cero:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ó } b = 0$$

EJERCICIOS

10. Dada la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$, comprueba si alguno de los siguientes valores es solución de la misma: $-2, 0, 2, 3$.

11. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 = 49$	b) $3x^2 - 75 = 0$	c) $x^2 - 24 = 1$	d) $4(x^2 - 1) = 12$
e) $x^2 - 6x = 0$	f) $3x^2 - 39x = 0$	g) $3x^2 = 2x$	h) $1 - 4x^2 = -8$
i) $2 - 9x^2 = -142$	j) $(x - 1)(x - 2) = 0$	k) $(x - 5)(x + 11) = 0$	l) $(2x - 5)(7x - 3) = 0$

5.2. Ecuación de segundo grado completa. Resolución general.

La ecuación de segundo grado $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ es ***completa*** cuando todos los coeficientes son distintos de cero.

Veamos cómo podemos resolver la ecuación de segundo grado completa $ax^2 + bx + c = 0$.

- Multiplicamos en ambos miembros por $4a$ para que aparezca un cuadrado perfecto: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$
- Sumamos en ambos miembros b^2 para completar el cuadrado perfecto: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$

$$\underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{\text{esta expresión es el cuadrado de un binomio}} + 4ac = b^2$$

- Se pasa al cuadrado perfecto: $(2ax + b)^2 + 4ac = b^2$
- Se despeja el cuadrado perfecto: $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
- Se extrae la raíz cuadrada: $\begin{cases} 2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \\ 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac} \end{cases}$
- Se resuelven estas dos ecuaciones de primer grado: $\begin{cases} x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$

Una ecuación de segundo grado de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ tiene por soluciones:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

La expresión D = $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ se llama ***discriminante.***

5.3. Número de soluciones de una ecuación de segundo grado.

Dependiendo de los coeficientes a, b y c, una ecuación podrá o no, tener soluciones. Resolvamos las siguientes ecuaciones de segundo grado:

- $\boldsymbol{x^2 - 8x + 12 = 0} \Leftrightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{8 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases}$

  Esta ecuación tiene dos soluciones ya que 16 tiene dos raíces, por ser un número positivo.

- $\boldsymbol{x^2 + 10x + 25 = 0} \Leftrightarrow x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{-10 \pm 0}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -5 \end{cases}$

  Esta ecuación tiene sólo una solución, ya que 0 tiene una sola raíz. Diremos que es una solución doble.

- $\boldsymbol{2x^2 + x + 3 = 0} \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 24}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-23}}{4}$

  Esta ecuación no tiene soluciones, ya que –23 no tiene raíces por ser un número negativo.

El valor del discriminante D = $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ permite saber el número de soluciones sin necesidad de hallarlas:

1º. Si D > **0** la ecuación tiene **dos soluciones.**

2º. Si D = **0** la ecuación tiene **una solución** (solución doble).

3º. Si D < **0** la ecuación **no tiene solución.**

Ejemplo. Halla el valor de k para que las soluciones de la ecuación $x^2 + kx + 36 = 0$ sean iguales.

Para que las soluciones sean iguales se debe verificar que $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Sustituyendo: $b^2 - 4ac = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = k^2 - 144 = 0 \Rightarrow k^2 = 144$

Resolviendo: $k = \pm\sqrt{144}$, luego $k = 12$, $k = -12$

Las ecuaciones son: $x^2 + 12x + 36 = 0$ y $x^2 - 12x + 36 = 0$

EJERCICIOS

12. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.
    a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
    b) $16x^2 + 8x + 1 = 0$
    c) $2x(x + 3) = 3(x - 19)$
    d) $2x^2 + 4x + 4 = 0$
    e) $x^2 - 7x = 18$
    f) $x^2 + 9 = 10x$
    g) $2x(3x - 4) + 2 = (1 - 3x)(x + 1)$
    h) $4x^2 - 17x = -4$
    i) $4x^2 - 37x + 9 = 0$
    j) $x^2 + x + 1 = 0$

13. En la ecuación $x^2 - 5x + c = 0$, una solución es 3. ¿Cuánto vale el coeficiente c? ¿Cuál es la otra solución?

14. Determina m en la ecuación $x^2 - 6x + m = 0$, de modo que las dos soluciones sean iguales. Halla dichas soluciones.

6. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES.

Para resolver un problema mediante una ecuación o un sistema de ecuaciones se siguen los pasos habituales en la resolución de problemas.

Comprensión del problema

Tras una o varias lecturas del mismo, hay que saber lo que significan las palabras y términos matemáticos del enunciado, y distinguir los datos conocidos de los desconocidos que se piden (incógnitas).

Planteamiento

En el planteamiento se expresan las condiciones del enunciado mediante una ecuación o un sistema de ecuaciones; para ello:

- Se designa la(s) incógnita(s).
- Se plantea la ecuación o sistema de ecuaciones, estableciendo la relación que hay entre los datos y las incógnitas.

Resolución

Se resuelve la ecuación o sistema que resulta en el planteamiento, respondiendo a todas las cuestiones que se plantean en el problema.

Comprobación

Se comprueba si las soluciones obtenidas responden a las condiciones del resultado, desechando aquellas que carecen de sentido en el contexto del problema.

Ejemplo. *El perro de Juan tiene hoy 12 años menos que él. Dentro de 4 años, Juan tendrá el triple de la edad de su perro. ¿Cuál es la edad de Juan y la de su perro?*

Planteamiento:

		Edad de Juan		Edad del perro
Hoy	$\longrightarrow$	x	$\longrightarrow$	$x-12$
Dentro de 4 años	$\longrightarrow$	$x+4$	$\longrightarrow$	$x-12+4=x-8$

Como dentro de 4 años la edad de Juan será el triple que la de su perro, resulta la ecuación

$$x+4=3\cdot(x-8)$$

Resolución:

$$x+4=3\cdot(x-8) \iff x=14$$

La edad de Juan es 14 años, y la edad de su perro es 14 − 12 = 2 años.

Comprobación:

Dentro de 4 años la edad de Juan será 14 + 4 = 18, y la de su perro será 2 + 4 = 6. Como vemos, la edad de Juan será el triple que la de su perro: 6 · 3 = 18.

Ejemplo. *La edad de la abuela de Juan es un número de dos cifras y es 9 veces la suma de las cifras. Hace 63 años su edad se escribía con las mismas cifras cambiadas de orden. ¿Cuál es la edad actual de la abuela de Juan?*

Planteamiento:

Designamos las incógnitas: edad actual de la abuela = número $xy = 10x + y$

Planteamos el sistema de ecuaciones:

- El número es 9 veces la suma de las cifras:

$$10x+y=9\cdot(x+y) \iff x-8y=0$$

- Hace 63 años su edad se escribía con las mismas cifras cambiadas de orden:

$$10x+y-63=10y+x \iff 9x-9y=63 \iff x-y=7$$

Resolución:

$$\begin{cases} x-8y=0 \\ x-y=7 \end{cases} \iff x=8,\ \mathrm{y}=1$$

La edad actual de la abuela de Juan es 81 años.

Comprobación:

La edad de la abuela es 9 veces la suma de las cifras: 9 · (8 + 1) = 9 · 9 = 81. Hace 63 años la edad de la abuela se escribía con las mismas cifras cambiadas de orden: 81 − 63 = 18.

EJERCICIOS

15. En un viaje turístico participan 60 personas, entre hombres, mujeres y niños. Hay doble número de niños que de hombres y el número de mujeres es 2/3 del número de hombres y de niños juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños van de viaje?
16. Una moto a 80 km/h trata de alcanzar a otra que va a una velocidad de 60 km/h y que salió del mismo punto 4 horas antes. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzarla?
17. ¿Qué tres múltiplos consecutivos de 3 suman 702?

18. María tiene el triple de años que Ana y dentro de 12 años tendrá el doble de años que Ana. ¿Cuántos años tienen Ana y María?
19. A un número natural le sumamos 12 unidades, duplicamos el número resultante y restamos 24 unidades, obteniendo el duplo del número natural dado. ¿Cuál es este número?
20. En un aparcamiento hay 452 vehículos entre coches y motos. Halla el número de vehículos que hay de cada tipo sabiendo que en total suman 1.744 ruedas apoyadas en el suelo.
21. En un instituto hay 300 alumnos entre chicos y chicas. Han ido de excursión 155 alumnos, siendo el 60 % de los chicos del instituto y el 40 % de las chicas. ¿Cuántos chicos y chicas hay en el instituto?
22. El gerente de una cafetería usa dos marcas de café, una marca A de 4'20 €/kg y otra marca B de 5'70 €/kg. Desea preparar 20 kg de una mezcla de ellas a 4'80 euros el kilo. ¿Qué cantidades deberá utilizar de cada una de las distintas marcas?
23. Descompón 172 en dos sumandos de manera que al dividir el mayor por el menor se obtenga 3 de cociente y 4 de resto.
24. Las dos cifras de un número suman 12. Si restamos del número dado el que resulta de invertir sus cifras obtenemos 18. Calcula el número dado.
25. Queremos distribuir entradas de teatro entre varios chicos. Si a cada uno le damos 4 entradas nos faltan 3, pero si a cada uno le damos 3 nos sobran 9. ¿Cuántos chicos hay y de cuántas entradas disponemos?
26. Dos amigos vienen del mercado de comprar naranjas. Antonio le dice a Pilar: «Si tú me das un kilo tendremos los dos la misma cantidad». A lo que Pilar le contesta: «Si tú me das a mí un kilo yo tendré doble número de kilos que tú». ¿Cuántos kilos compraron cada uno?
27. Halla dos números enteros consecutivos cuyo producto es 72.
28. La suma de un número y su cuadrado es 42. Hállalo.
29. Uno de los lados de un rectángulo mide 6 cm más que el otro. ¿Cuáles son las dimensiones si su área es 91 cm^2?
30. Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m^2.
31. Una habitación rectangular tiene una superficie de 28 m^2 y su perímetro tiene una longitud de 22 m. Halla las dimensiones de la habitación.
32. Aumentando un lado de un cuadrado en 4 m y los lados contiguos en 6 m se obtiene un rectángulo de doble área que el cuadrado. Halla el lado del cuadrado.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Comprueba si los valores que se indican son soluciones de las ecuaciones correspondientes.

   a) $x = 3$ de $2x + 3 = 5x - 1$ b) $x = 4$ de $\frac{x}{2}+1 = x-1$

   c) $x = 10$ de $3(x - 2) = 2x + 4$ d) $x = -1$ de $\frac{5x-2}{10}+3 = 2x+1$

   Son soluciones de las ecuaciones correspondientes los apartados b) y c).

2. Aplica las reglas de equivalencia y resuelve las siguientes ecuaciones.

   a) $2x - 5 = x + 41 - 5$ $\boldsymbol{x = 41}$ b) $3x + 1 = x + 7$ $\boldsymbol{x = 3}$ c) $3x + 23 = 2x + 59$ $\boldsymbol{x = 36}$

   d) $2x+\frac{5x}{3} = 66$ $\boldsymbol{x = 18}$ e) $5x + 8 = 8x + 2$ $\boldsymbol{x = 2}$ f) $9 + 9x = 117 - 3x$ $\boldsymbol{x = 9}$

   g) $21 - 7x = 41x - 123$ $\boldsymbol{x = 3}$ h) $500 - 24x = -4 - 3x$ $\boldsymbol{x = 24}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones.

   a) $3x + 100 = 5(200 - 3x)$ $\boldsymbol{x = 50}$ d) $9(x - 2) - 3(x - 4) = 3(16 - 7x)$ $\boldsymbol{x = 2}$

   b) $5(20 - x) = 4(2x - 1)$ $\boldsymbol{x = 8}$ e) $6 - (3x + 1) = 5 - 3(x - 2)$ **E. I.**

   c) $-10x + 8 = 2(4 - 5x)$ **E. C. I.** f) $4 - 2(x - 1) = 3(2 - x) - 10$ $\boldsymbol{x = -10}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones.

   a) $\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}-\frac{5x}{6} = 15$ $\boldsymbol{x = 36}$ b) $\frac{x-1}{1}-\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3} = 0$ $\boldsymbol{x = 6/5}$ c) $\frac{10x+3}{6}-\frac{3x-1}{10} = \frac{x}{2}-1$ $\boldsymbol{x = -24/13}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones.

   a) $\frac{3x-17}{8}-\frac{1-4x}{13} = \frac{1-x}{4}-\frac{9-x}{6}$ $\boldsymbol{x = 297/239}$ d) $\frac{5x-1}{7}-\frac{7x+19}{20} = \frac{x+11}{14}+\frac{3x-4}{5}$ $\boldsymbol{x = -151/43}$

   b) $\frac{x}{3}+3-\frac{2x}{5} = \frac{1}{5}\left(-\frac{x}{3}+15\right)$ **E. C. I.** e) $\frac{2x-1}{3}-\frac{x-3}{4} = \frac{5x}{12}+\frac{7}{6}$ **E. I.**

   c) $\frac{2x-3}{18}-\frac{2-4x}{27} = \frac{5}{3}-\frac{2x-1}{6}$ $\boldsymbol{x = 7/2}$ f) $\frac{x}{6}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right) = \frac{2x-1}{6}$ $\boldsymbol{x = 3/5}$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones.

   a) $\frac{30-x}{20+x} = \frac{5}{4}$ $\boldsymbol{x = 20/9}$ b) $\frac{9+x}{19-x} = \frac{4}{3}$ $\boldsymbol{x = 7}$

7. Varias personas han ido a merendar a una cafetería. Piden 4 bocadillos y 5 refrescos; deben pagar 7'20 euros. Encuentra posibles valores del precio de cada bocadillo y cada refresco.

   Si notamos por *x* = "precio de un bocadillo" e *y* = "precio de un refresco", los valores posibles de cada uno de ellos son las soluciones de la ecuación con dos incógnitas 4*x* + 5*y* = 7'20. Algunos posibles valores son:

x	**…**	**1**	**0'55**	**0'80**	**…**
y	**…**	**0'64**	**1**	**0'80**	**…**

8. Resuelve los sistemas siguientes por el método que se indica: sustitución (S), igualación (I) y reducción (R).

   a) (S) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ b) (S) $\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 3x + 5y = -16 \end{cases}$ c) (S) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 6x - 4y = 7 \end{cases}$

   d) (I) $\begin{cases} -5x + 4y = 2 \\ x = 3y \end{cases}$ e) (I) $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 4x - 3y = -6 \end{cases}$ f) (I) $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -10x + 4y = -8 \end{cases}$

   g) (R) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$ h) (R) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$ i) (R) $\begin{cases} 3y - 2x = -6 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$

   a) *x* = 1, *y* = -1 **b) *x* = -2, *y* = -2** **c) Sistema incompatible**

   d) *x* = -6/11, *y* = -2/11 **e) *x* = 0, *y* = 2**

f) Sistema compatible indeterminado con soluciones de la forma x, $y = \dfrac{5x - 4}{2}$

g) $x = 0$, $y = 0$ **h) $x = 2/17$, $y = -3/17$** **i) $x = 0$, $y = -2$**

9. Resuelve los sistemas siguientes por el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} x + 2y = 12 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 2 \\ \dfrac{2x}{3} - \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{2y+1}{3} = 4 \\ \dfrac{3x}{5} - \dfrac{2}{3} = 4y \end{cases}$

a) $x = 4$, $y = 4$ **b) $x = 3$, $y = 2$** **c) $x = 425/36$, $y = 77/48$**

10. Dada la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$, comprueba si alguno de los siguientes valores es solución de la misma: –2, 0, 2, 3.
Son soluciones de la ecuación los valores $x = 2$ y $x = 3$.

11. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 = 49$	b) $3x^2 - 75 = 0$	c) $x^2 - 24 = 1$	d) $4(x^2 - 1) = 12$
e) $x^2 - 6x = 0$	f) $3x^2 - 39x = 0$	g) $3x^2 = 2x$	h) $1 - 4x^2 = -8$
i) $2 - 9x^2 = -142$	j) $(x - 1)(x - 2) = 0$	k) $(x - 5)(x + 11) = 0$	l) $(2x - 5)(7x - 3) = 0$
a) $x = 7$, $x = -7$	**b) $x = 5$, $x = -5$**	**c) $x = 5$, $x = -5$**	**d) $x = 2$, $x = -2$**
e) $x = 0$, $x = 6$	**f) $x = 0$, $x = 13$**	**g) $x = 0$, $x = 2/3$**	**h) $x = 3/2$, $x = -3/2$**
i) $x = 4$, $x = -4$	**j) $x = 1$, $x = 2$**	**k) $x = 5$, $x = -11$**	**l) $x = 5/2$, $x = 3/7$**

12. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$	b) $16x^2 + 8x + 1 = 0$
c) $2x(x + 3) = 3(x - 19)$	d) $2x^2 + 4x + 4 = 0$
e) $x^2 - 7x = 18$	f) $x^2 + 9 = 10x$
g) $2x(3x - 4) + 2 = (1 - 3x)(x + 1)$	h) $4x^2 - 17x = -4$
i) $4x^2 - 37x + 9 = 0$	j) $x^2 + x + 1 = 0$

a) $x = 1$, $x = 2/3$	**b) $x = -1/4$ raíz doble**	**c) No tiene soluciones**	**d) No tiene soluciones**
e) $x = -2$, $x = 9$	**f) $x = 1$, $x = 9$**	**g) $x = 1/3$ raíz doble**	**h) $x = 4$, $x = 1/4$**
i) $x = 9$, $x = 1/4$	**j) No tiene soluciones**		

13. En la ecuación $x^2 - 5x + c = 0$, una solución es 3. ¿Cuánto vale el coeficiente c? ¿Cuál es la otra solución?
El coeficiente $c = 6$. La otra solución es $x = 2$.

14. Determina m en la ecuación $x^2 - 6x + m = 0$, de modo que las dos soluciones sean iguales. Halla dichas soluciones.
El coeficiente $m = 9$. Las soluciones de la correspondiente ecuación es $x = 3$ raíz doble.

15. En un viaje turístico participan 60 personas, entre hombres, mujeres y niños. Hay doble número de niños que de hombres y el número de mujeres es 2/3 del número de hombres y de niños juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños van de viaje?
En el viaje participan 12 hombres, 24 niños y 24 mujeres.

16. Una moto a 80 km/h trata de alcanzar a otra que va a una velocidad de 60 km/h y que salió del mismo punto 4 horas antes. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzarla?
Tardará 12 horas en alcanzarla.

17. ¿Qué tres múltiplos consecutivos de 3 suman 702?
Dichos múltiplos son 231, 234 y 237.

18. María tiene el triple de años que Ana y dentro de 12 años tendrá el doble de años que Ana. ¿Cuántos años tienen Ana y María?
Ana tiene 12 años y María 36 años.

19. A un número natural le sumamos 12 unidades, duplicamos el número resultante y restamos 24 unidades, obteniendo el duplo del número natural dado. ¿Cuál es este número?
Cualquier número natural es solución de nuestro problema. ¿Por qué?

20. En un aparcamiento hay 452 vehículos entre coches y motos. Halla el número de vehículos que hay de cada tipo sabiendo que en total suman 1.744 ruedas apoyadas en el suelo.
En el aparcamiento hay 420 coches y 32 motos.

21. En un instituto hay 300 alumnos entre chicos y chicas. Han ido de excursión 155 alumnos, siendo el 60 % de los chicos del instituto y el 40 % de las chicas. ¿Cuántos chicos y chicas hay en el instituto?
En el instituto hay 175 chicos y 125 chicas.

22. El gerente de una cafetería usa dos marcas de café, una marca A de 4'20 €/kg y otra marca B de 5'70 €/kg. Desea preparar 20 kg de una mezcla de ellas a 4'80 euros el kilo. ¿Qué cantidades deberá utilizar de cada una de las distintas marcas?
Deberá utilizar 12 kilogramos de la marca A y 8 kilogramos de la marca B.

23. Descompón 172 en dos sumandos de manera que al dividir el mayor por el menor se obtenga 3 de cociente y 4 de resto.
Los correspondientes sumandos han de ser 130 y 42.

24. Las dos cifras de un número suman 12. Si restamos del número dado el que resulta de invertir sus cifras obtenemos 18. Calcula el número dado.
El número buscado es 75.

25. Queremos distribuir entradas de teatro entre varios chicos. Si a cada uno le damos 4 entradas nos faltan 3, pero si a cada uno le damos 3 nos sobran 9. ¿Cuántos chicos hay y de cuántas entradas disponemos?
Contamos con 12 chicos y disponemos de 45 entradas.

26. Dos amigos vienen del mercado de comprar naranjas. Antonio le dice a Pilar: «Si tú me das un kilo tendremos los dos la misma cantidad». A lo que Pilar le contesta: «Si tú me das a mí un kilo yo tendré doble número de kilos que tú». ¿Cuántos kilos compraron cada uno?
Antonio compró 5 kilogramos, y Pilar 7.

27. Halla dos números enteros consecutivos cuyo producto es 72.
Tenemos dos soluciones posibles a este problema: los números 8 y 9, o bien, los números -9 y -8.

28. La suma de un número y su cuadrado es 42. Hállalo.
De nuevo tenemos dos soluciones posibles a este problema: dicho número puede ser el 6 ó el -7.

29. Uno de los lados de un rectángulo mide 6 cm más que el otro. ¿Cuáles son las dimensiones si su área es 91 cm^2?
Los lados del rectángulo miden 7 y 13 centímetros, respectivamente.

30. Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m^2.
Los lados del triángulo rectángulo miden 6, 8 y 10 centímetros.

31. Una habitación rectangular tiene una superficie de 28 m^2 y su perímetro tiene una longitud de 22 m. Halla las dimensiones de la habitación.
La habitación tiene unas dimensiones de 4 por 7 metros.

32. Aumentando un lado de un cuadrado en 4 m y los lados contiguos en 6 m se obtiene un rectángulo de doble área que el cuadrado. Halla el lado del cuadrado.
El cuadrado tiene 12 metros de lado.