DETERMINANTES

1. Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 5a & 5b & 5c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 5a & 5b & 5c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{Sacando factor común de 10 en la 1ª fila} \\ \text{Sacando factor común de 5 en la 2ª fila} \end{Bmatrix} = 10 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Determinante tipo Van der Mondem.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - a \cdot F_1 \\ F_3 = F_3 - a \cdot F_2 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2 - ab & c^2 - ac \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b\cdot(b-a) & c\cdot(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)\cdot(c-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$$

sustituyendo en la primera expresión

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 5a & 5b & 5c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 10 \cdot 5 \cdot (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$$

2. Calcular en función de n el determinante $\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+3 & n+4 & n+5 \\ n+6 & n+7 & n+8 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+3 & n+4 & n+5 \\ n+6 & n+7 & n+8 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

por ser F_2 proporcional a F_3.

3. Obtener, simplificando, el desarrollo del determinante $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & b^2c & 3abc \end{vmatrix}$

Solución:

Teniendo en cuenta la propiedad de los determinantes que dice: Si todos los términos de una línea (fila ó columna) de un determinante aparecen multiplicamos por el mismo número, se puede sacar factor común de dicho número quedando el determinante multiplicado por ese número.

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ k\cdot a_{2.1} & k\cdot a_{2.2} & k\cdot a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & b^2c & 3abc \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 : (a) \\ F_2 : (b) \\ F_3 : (bc) \end{Bmatrix} = a \cdot b \cdot bc = \begin{vmatrix} bc & -b & a \\ -bc & 2b & -a \\ bc & b & 3a \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 : (bc) \\ C_2 : (b) \\ C_3 : (a) \end{Bmatrix} = ab^2c \cdot bc \cdot b \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$=2\cdot a^2 b^4 c^2$$

4. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}=3$, calcular: $\begin{vmatrix} 2x & 2z & 2y \\ 2m & 2p & 2n \\ 2a & 2c & 2b \end{vmatrix}$

Solución:

Teniendo en cuenta las propiedad de los determinantes que dicen:

- Si todos los términos de una línea (fila ó columna) de un determinante aparecen multiplicamos por el mismo número, se puede sacar factor común de dicho número quedando el determinante multiplicado por ese número.

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ k\cdot a_{2.1} & k\cdot a_{2.2} & k\cdot a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix}$$

- Si permutamos dos líneas paralelas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} = \{F_1 \leftrightarrow F_2\} = -\begin{vmatrix} a_{2.1} & a_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} = \{C_1 \leftrightarrow C_2\} = +\begin{vmatrix} a_{2.2} & a_{2.1} & a_{3.2} \\ a_{2.1} & a_{1.1} & a_{3.1} \\ a_{3.2} & a_{3.1} & a_{3.3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2x & 2z & 2y \\ 2m & 2p & 2n \\ 2a & 2c & 2b \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1:(2) \\ F_2:(2) \\ F_3:(2) \end{Bmatrix} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} x & z & y \\ m & p & n \\ a & c & b \end{vmatrix} = \{C_2 \leftrightarrow C_3\} = -8\cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= \{F_2 \leftrightarrow F_3\} = +8\cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = \{F_1 \leftrightarrow F_2\} = -8\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = -8\cdot 3 = -24$$

5. Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+2 & a & a \\ a & a & a+3 & a \\ a & a & a & a+4 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+2 & a & a \\ a & a & a+3 & a \\ a & a & a & a+4 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_2 = C_2 - C_1 \\ C_3 = C_3 - C_1 \\ C_4 = C_4 - C_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 & -1 \\ a & 2 & 0 & 0 \\ a & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \{F_4 = F_4 + 4\cdot F_1\} =$$

$$= \begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 & -1 \\ a & 2 & 0 & 0 \\ a & 0 & 3 & 0 \\ 5a+4 & -4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollando por los términos de la 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 & -1 \\ a & 2 & 0 & 0 \\ a & 0 & 3 & 0 \\ 5a+4 & -4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{1+4}\cdot \begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \\ 5a+4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \\ 5a+4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = \{F_3 + 2\cdot F_1\} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \\ 7a+4 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

desarrollando por los términos de la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \\ 7a+4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a & 3 \\ 7a+4 & -4 \end{vmatrix} = -2\cdot\left[a\cdot(-4)-3\cdot(7a+4)\right] = -2\cdot(-25a-12) = 50a+24$$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, e I la matriz identidad de orden tres, determinar, si es posible, un valor de k para el que la matriz $(A - k\cdot I)^2$ sea la matriz nula.

Solución:

$$\text{Sí } (A-k\cdot I)^2=0 \;\Rightarrow\; \left|(A-k\cdot I)^2\right| = |0| = 0$$

$$\left|(A-k\cdot I)^2\right| = \left|(A-k\cdot I)\cdot(A-k\cdot I)\right| = 0$$

$$\left|(A-k\cdot I)\right|\cdot\left|(A-k\cdot I)\right| = 0$$

$$\left|(A-k\cdot I)\right| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - k\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

sacando factor común de −1 en las dos primeras filas

$$(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{vmatrix} = (-1)^2\cdot\left[k^2\cdot(3-k)+2+2-\left(2k+2k+(3-k)\right)\right] =$$

$$= (-1)^2\cdot\left(-k^3+3k^2-3k+1\right) = (k-1)^3 = 0$$

$$k = 1$$

7. Demostrar que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ es divisible por 11.

Solución:

Se pide demostrar sin llegar a calcular el valor del determinante, que es múltiplo de 11. Se buscan múltiplos de 11 formados en filas ó en columnas, de derecha a izquierda o viceversa, de arriba abajo o viceversa.

Formados números de arriba abajo, aparecen: $\begin{cases} 1221 = 111\cdot 11 \\ 9625 = 875\cdot 11 \\ 1111 = 101\cdot 11 \\ 3839 = 349\cdot 11 \end{cases}$. Se forman estos números sobre la línea (fila ó columna) donde se encuentre el digito de unidad, en este caso sobre la 4ª fila

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \left\{F_4 = 1000\cdot F_1 + 100\cdot F_2 + 10\cdot F_3 + F_4\right\} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1221 & 9625 & 1111 & 3839 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 111\cdot 11 & 875\cdot 11 & 101\cdot 11 & 349\cdot 11 \end{vmatrix} = 11\cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 111 & 875 & 101 & 349 \end{vmatrix}$$

lo que demuestra que el determinante es múltiplo de 11

8. Obtener en función de a, b y c el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$

Solución:

Se hacen ceros en la 1ª fila operando con el término 1.4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 = C_1 - C_4 \\ C_2 = C_2 - C_4 \\ C_3 = C_3 - C_4 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+4}\cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = -abc$$

9. Calcular el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3a & 3b & 3c \\ 7a^2 & 7b^2 & 7c^2 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3a & 3b & 3c \\ 7a^2 & 7b^2 & 7c^2 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot 7\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - a\cdot F_1 \\ F_3 = F_3 - a\cdot F_2 \end{Bmatrix} = 105\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2 - a\cdot b & c^2 - a\cdot c \end{vmatrix} =$$

$$= 105\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b\cdot(b-a) & c\cdot(c-a) \end{vmatrix} = 105\cdot(b-a)\cdot(c-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = 105\cdot(b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-a)$$

10. Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 5a & 5b & 5c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 5a & 5b & 5c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 10\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - a\cdot F_1 \\ F_3 = F_3 - a^2\cdot F_2 \end{Bmatrix} = 50\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^3 - a^2\cdot b & c^3 - a^2\cdot c \end{vmatrix} =$$

$$= 50\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b\cdot(b^2-a^2) & c\cdot(c^2-a^2) \end{vmatrix} = 50\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b\cdot(b-a)\cdot(b+a) & c\cdot(c-a)\cdot(c+a) \end{vmatrix} =$$

$$= 50\cdot(b-a)\cdot(c-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b\cdot(b+a) & c\cdot(c+a) \end{vmatrix} = 50\cdot(b-a)\cdot(c-a)\cdot[b\cdot(b+a) - c\cdot(c+a)] =$$

$$= 50\cdot(b-a)\cdot(c-a)\cdot[b^2 + ab - c^2 - ac] = 50\cdot(b-a)\cdot(c-a)\cdot[b^2 - c^2 + ab - ac] =$$

$$= 50\cdot(b-a)\cdot(c-a)\cdot[(b-c)\cdot(b+c) + a\cdot(b-c)] = 50\cdot(b-a)\cdot(c-a)\cdot(b-c)\cdot(a+b+c)$$

11. Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ \log^2 3 & \log^2 30 & \log^2 300 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ \log^2 3 & \log^2 30 & \log^2 300 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - \log 3 \cdot F_1 \\ F_3 = F_3 - \log 3 \cdot F_2 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \log 30 - \log 3 & \log 300 - \log 3 \\ 0 & \log^2 30 - \log 3 \cdot \log 30 & \log^2 300 - \log 3 \cdot \log 300 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \log 30 - \log 3 & \log 300 - \log 3 \\ \log 30 \cdot (\log 30 - \log 3) & \log 300 \cdot (\log 300 - \log 3) \end{vmatrix} = (\log 30 - \log 3) \cdot (\log 300 - \log 3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \log 30 & \log 300 \end{vmatrix} =$$

$$= (\log 30 - \log 3) \cdot (\log 300 - \log 3) \cdot (\log 300 - \log 30) = \log \frac{30}{3} \cdot \log \frac{300}{3} \cdot \log \frac{300}{30} =$$

$$= \log 10 \cdot \log 100 \cdot \log 10 = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

12. Expresar en forma de productos de factores de primer grado, el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1 \\ F_4 = F_4 + F_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$$

Matriz triangular, su determinante es el producto de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^3$$

13. Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_2 = C_2 - C_1 \\ C_3 = C_3 - C_1 \\ C_4 = C_4 - C_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 3 & 2x-2 & x^2+2x-3 & 3x^2-3 \\ 3 & x-1 & 2x-2 & 3x-3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

desarrollando el determinante por los adjuntos de la 4ª fila y factorizando todos los polinomios

$$=1\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} x-1 & (x-1)\cdot(x+1) & (x-1)\cdot(x^2+x+1) \\ 2\cdot(x-1) & (x-1)\cdot(x+3) & 3(x-1)\cdot(x+1) \\ x-1 & 2(x-1) & 3(x-1) \end{vmatrix}=$$

sacando factor común de (x–1) en cada columna y operando los términos del determinante

$$=-1(x-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 2 & x+3 & 3x+3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} C_2=C_2-2\cdot C_1 \\ C_3=C_3-3\cdot C_1 \end{Bmatrix}=-1(x-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 1 & x-1 & x^2+x-2 \\ 2 & x-1 & 3x-3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

desarrollando el determinante por los adjuntos de la 3ª fila y factorizando los polinomios

$$=-1(x-1)^3\cdot 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} x-1 & (x-1)\cdot(x+2) \\ x-1 & 3\cdot(x-1) \end{vmatrix}=$$

sacando factor común de (x–1) en cada columna y operando los términos del determinante

$$=-1(x-1)^3\cdot(x-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & x+2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-1(x-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=$$

desarrollando el determinante por los adjuntos de la 2ª fila

$$=-1(x-1)^5\cdot 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot|x-1|=(x-1)^6=0$$

$$x = 1$$

14. Calcular el valor de $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$

Solución.

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}=\{F_4=F_4+F_3+F_2+F_1\}=\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ 3x+3 & 3x+3 & 3x+3 & 3x+3 \end{vmatrix}=$$

sacando factor común de (3x+ 3) de la 4ª fila

$$=(3x+3)\cdot\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} C_1=C_1-C_4 \\ C_2=C_2-C_4 \\ C_3=C_3-C_4 \end{Bmatrix}=(3x+3)\cdot\begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 & x \\ 0 & 3-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 3-x & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

aparece el determinante de una matriz triangular, que es igual, al producto de los términos de la diagonal

$$=(3x+3)\cdot(3-x)^3$$

15. Resolver la siguiente ecuación $\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$ (operando el determinante antes de desarrollarlo).

Solución:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = \{F_4 = F_4 + F_3 + F_2 + F_1\} = \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ 3x-1 & 3x-1 & 3x-1 & 3x-1 \end{vmatrix} =$$

sacando factor común de (3x–1) de la 4ª fila

$$= (3x-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 = C_1 - C_4 \\ C_2 = C_2 - C_4 \\ C_3 = C_3 - C_4 \end{Bmatrix} = (3x-1)\cdot\begin{vmatrix} -1-x & 0 & 0 & x \\ 0 & -1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & -1-x & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

matriz triangular, su determinante es el producto de los términos de la diagonal

$$= (3x-1)\cdot(-1-x)^3 = (1-3x)\cdot(1-x)^3 = 0: \begin{cases} x = 1/3 \\ x = 1 \end{cases}$$

16. Resolver el determinante $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Solución:

Sacando factor común x en la 1ª columna

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_2 = C_2 - C_1 \\ C_3 = C_3 - C_1 \\ C_4 = C_4 - C_1 \end{Bmatrix} = x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1-x & -x & 0 \\ x & -x & 0 & 1-x \\ x & 0 & 1-x & -x \end{vmatrix} =$$

desarrollando el determinante por los adjuntos de la 1ª fila

$$= x\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -x & 0 & 1-x \\ 0 & 1-x & -x \end{vmatrix} = \{F_3 = F_3 + F_2 + F_1\} = x\cdot\begin{vmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -x & 0 & 1-x \\ 1-2x & 1-2x & 1-2x \end{vmatrix} =$$

sacando factor común de (1–2x) de la 3ª fila

$$= (1-2x)\cdot x\cdot\begin{vmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -x & 0 & 1-x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 = C_1 - C_3 \\ C_2 = C_2 - C_3 \end{Bmatrix} = (1-2x)\cdot x\cdot\begin{vmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -1 & x-1 & 1-x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

desarrollando el determinante por los adjuntos de la 3ª fila

$$= (1-2x)\cdot x\cdot 1\cdot (-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} 1-x & -x \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = x\cdot(1-2x)\cdot[(1-x)\cdot(x-1)-x] = x\cdot(1-2x)\cdot(-1+x-x^2) =$$

$$= x\cdot(x^2 - x + 1)\cdot(2x-1)$$

17. Utilizando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

por tener do filas proporcionales. ($F_3 = 2\cdot F_2$)

18. Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ F_4 = F_4 - F_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & z & 0 \\ -x & 0 & 0 & -z \end{vmatrix} = \{C_2 = C_2 - C_1\} = \begin{vmatrix} 1+x & -x & 1 & 1 \\ -x & 0 & 0 & 0 \\ -x & x & z & 0 \\ -x & x & 0 & -z \end{vmatrix} =$$

desarrollando el determinante por los adjuntos de la 2ª fila

$$= -x\cdot(-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ x & z & 0 \\ x & 0 & -z \end{vmatrix} = \{F_2 = F_2 - z\cdot F_1\} = x\cdot \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ x+z\cdot x & 0 & -z \\ x & 0 & -z \end{vmatrix} =$$

desarrollando el determinante por los adjuntos de la 2ª columna

$$= x\cdot 1\cdot (-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} x+z\cdot x & -z \\ x & -z \end{vmatrix} = \{F_1 = F_1 - F_2\} = -x\cdot \begin{vmatrix} z\cdot x & 0 \\ x & -z \end{vmatrix} = -x\cdot[-z^2\cdot x - 0] = x^2\cdot z^2$$

19. Calcular: $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$

Solución:

Para el desarrollo de este determinante se utiliza la propiedad:
Si una línea de un determinante se puede escribir como suma de dos términos, el determinante se puede escribir como suma de dos determinantes, como indica la siguiente relación

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2}+b_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.4} \\ a_{2.1} & a_{2.2}+b_{2.2} & a_{2.3} & a_{2.4} \\ a_{3.1} & a_{3.2}+b_{3.2} & a_{3.3} & a_{3.4} \\ a_{4.1} & a_{4.2}+b_{4.2} & a_{4.3} & a_{4.4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.4} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & a_{2.4} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & a_{3.4} \\ a_{4.1} & a_{4.2} & a_{4.3} & a_{4.4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1.1} & b_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.4} \\ a_{2.1} & b_{2.2} & a_{2.3} & a_{2.4} \\ a_{3.1} & b_{3.2} & a_{3.3} & a_{3.4} \\ a_{4.1} & b_{4.2} & a_{4.3} & a_{4.4} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ F_4 = F_4 - F_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -a & b & 0 & 0 \\ -a & 0 & c & 0 \\ -a & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ -a & b & 0 & 0 \\ -a & 0 & c & 0 \\ -a & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$$

$$= b\cdot c\cdot d + a\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & c & 0 \\ -1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1 \\ F_4 = F_4 + F_1 \end{Bmatrix} = b\cdot c\cdot d + a\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & d+1 \end{vmatrix} =$$

desarrollando el determinante por los adjuntos de la 1ª columna

$$= b\cdot c\cdot d + a\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} b+1 & 1 & 1 \\ 1 & c+1 & 1 \\ 1 & 1 & d+1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{Bmatrix} = b\cdot c\cdot d + a\cdot \begin{vmatrix} b+1 & 1 & 1 \\ -b & c & 0 \\ -b & 0 & d \end{vmatrix} =$$

$$= b\cdot c\cdot d + a\cdot \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ -b & c & 0 \\ -b & 0 & d \end{vmatrix} \right] = b\cdot c\cdot d + a\cdot \left[c\cdot d + b\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & c & 0 \\ -1 & 0 & d \end{vmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1 \end{Bmatrix} =$$

$$= b\cdot c\cdot d + a\cdot \left[c\cdot d + b\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c+1 & 1 \\ 0 & 1 & d+1 \end{vmatrix} \right] =$$

desarrollando el determinante por los adjuntos de la 1ª columna

$$= b\cdot c\cdot d + a\cdot \left[c\cdot d + b\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} c+1 & 1 \\ 1 & d+1 \end{vmatrix} \right] = \{F_2 = F_2 - F_1\} = b\cdot c\cdot d + a\cdot \left[c\cdot d + b\cdot \begin{vmatrix} c+1 & 1 \\ -c & d \end{vmatrix} \right] =$$

$$= b\cdot c\cdot d + a\cdot \left[c\cdot d + b\cdot \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & 1 \\ -c & d \end{vmatrix} \right\} \right] = b\cdot c\cdot d + a\cdot \left[c\cdot d + b\cdot \left\{ d + c\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix} \right\} \right] = \{F_2 = F_2 + F_1\} =$$

$$= b\cdot c\cdot d + a\cdot \left[c\cdot d + b\cdot \left\{ d + c\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & d+1 \end{vmatrix} \right\} \right] = b\cdot c\cdot d + a\cdot [c\cdot d + b\cdot \{d + c\cdot (d+1)\}] =$$

$$= b\cdot c\cdot d + a\cdot c\cdot d + a\cdot b\cdot d + a\cdot b\cdot c + a\cdot b\cdot c\cdot d$$

20. Resolver: $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

Solución:

Se hacen ceros en la 4ª fila tomando como pivote el término 4.1

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_2 = C_2 + C_1 \\ C_4 = C_4 - x \cdot C_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1+x & -1 & -x^2 \\ -x & 0 & -1 & 1+x^2 \\ 1 & 0 & x & 1-x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

desarrollando el determinante por los adjuntos de la 4ª fila

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -1+x & -1 & -x^2 \\ 0 & -1 & 1+x^2 \\ 0 & x & 1-x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1+x & -1 & -x^2 \\ 0 & -1 & 1+x^2 \\ 0 & x & 1-x \end{vmatrix} =$$

desarrollando el determinante por los adjuntos de la 1ª columna

$$= - \cdot (-1)^{1+1} \cdot (x-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1+x^2 \\ x & 1-x \end{vmatrix} = - \cdot (x-1) \cdot \left[\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & x^2 \\ x & -x \end{vmatrix} \right] = (1-x) \cdot \left[(-1-x) + x \cdot \begin{vmatrix} -1 & -x \\ x & -1 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= (1-x) \cdot \left[(-1-x) + x \cdot (1+x^2) \right] = -(1-x) \cdot (1+x) + x \cdot (1-x) \cdot (1+x^2) = (x^2-1) + x \cdot (1-x) \cdot (1+x^2)$$

21. Calcular el siguiente determinante $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & b & c & c \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ F_4 = F_4 - F_1 \end{Bmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

desarrollando el determinante por los adjuntos de la 1ª columna

$$= a \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a \cdot (b-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{Bmatrix} =$$

$$= a \cdot (b-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} =$$

desarrollando el determinante por los adjuntos de la 1ª columna

$$= a \cdot (b-a) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} = a \cdot (b-a) \cdot (c-b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & c-b \\ 1 & d-b \end{vmatrix} = \{F_2 = F_2 - F_1\} =$$

$$= a \cdot (b-a) \cdot (c-b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & c-b \\ 0 & d-c \end{vmatrix} = a \cdot (b-a) \cdot (c-b) \cdot (-1)^{1+1} \cdot |d-c| =$$

$$= a\cdot(b-a)\cdot(c-b)\cdot(d-c)$$

22. Calcular: $\begin{vmatrix} a & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -b & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -a & 3 \\ 3 & 3 & 3 & b \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -b & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -a & 3 \\ 3 & 3 & 3 & b \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_2 = C_2 - C_1 \\ C_3 = C_3 - C_1 \\ C_4 = C_4 - C_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a & 3-a & 3-a & 3-a \\ 3 & -b-3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -a-3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & b-3 \end{vmatrix} =$$

desarrollando por los elementos de la cuarta fila:

$$= 3\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 3-a & 3-a & 3-a \\ -b-3 & 0 & 0 \\ 0 & -a-3 & 0 \end{vmatrix} + (b-3)\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix} a & 3-a & 3-a \\ 3 & -b-3 & 0 \\ 3 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

$$\begin{vmatrix} 3-a & 3-a & 3-a \\ -b-3 & 0 & 0 \\ 0 & -a-3 & 0 \end{vmatrix} = (3-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -b-3 & 0 & 0 \\ 0 & -a-3 & 0 \end{vmatrix} = (3-a)\cdot 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -b-3 & 0 \\ 0 & -a-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-a)\cdot(-b-3)\cdot(-a-3) = (3-a)\cdot(b+3)\cdot(a+3) = (9-a^2)\cdot(b+3) \quad \textbf{(2)}$$

$$\begin{vmatrix} a & 3-a & 3-a \\ 3 & -b-3 & 0 \\ 3 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3-a & 3-a \\ 0 & -a-3 \end{vmatrix} + (-b-3)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} a & 3-a \\ 3 & -a-3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\cdot(3-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -a-3 \end{vmatrix} + (-b-3)\cdot[a\cdot(-a-3)-(3-a)\cdot 3] =$$

$$= -3\cdot(3-a)\cdot(-a-3) + (-b-3)\cdot[-a^2-3a-9+3a] = 3\cdot(9-a^2) + (b+3)\cdot(9+a^2) =$$

$$= ba^2 + 9\cdot(b+6) \quad \textbf{(3)}$$

Sustituyendo **(2)** y **(3)** en **(1)**

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -b & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -a & 3 \\ 3 & 3 & 3 & b \end{vmatrix} = -3\cdot(9-a^2)\cdot(b+3) + (b-3)\cdot[ba^2 + 9\cdot(b+6)] =$$

$$= a^2\cdot(b^2+9) + 9\cdot(b^2-27) = a^2\cdot(b^2+3^2) + 3^2\cdot(b^2-3^3)$$

23. Calificación máxima: 2 puntos. Hallar en función de a, el valor del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

Solución

Utilizando las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} a&a&a&a\\ 2&a&a&a\\ 3&2&a&a\\ 4&3&2&a \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} 1&1&1&1\\ 2&a&a&a\\ 3&2&a&a\\ 4&3&2&a \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1=C_1-C_4\\ C_2=C_2-C_4\\ C_3=C_3-C_4 \end{Bmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} 0&0&0&1\\ 2-a&0&0&a\\ 3-a&2-a&0&a\\ 4-a&3-a&2-a&a \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 0&0&0&1\\ 2-a&0&0&a\\ 3-a&2-a&0&a\\ 4-a&3-a&2-a&a \end{vmatrix} = a\cdot 1\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 2-a&0&0\\ 3-a&2-a&0\\ 4-a&3-a&2-a \end{vmatrix} = a\cdot(-1)\cdot(2-a)^3 = a\cdot(a-2)^3$$

24. Calificación máxima: 3 puntos. Obtener el determinante Δ en función de Δ_1, siendo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a\\ a'+b' & b'+c' & c'+a'\\ a''+b'' & b''+c'' & c''+a'' \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a&b&c\\ a'&b'&c'\\ a''&b''&c'' \end{vmatrix}$$

Solución

Aplicando dos de las propiedades de los determinante

- A una línea (fila o columna) se le puede sumar o restar otra paralela multiplicado por cualquier número sin que varíe el determinante
- Sí en todos los términos de una línea (fila o columna) existe un factor común, este se puede sacar fuera como factor común del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a\\ a'+b' & b'+c' & c'+a'\\ a''+b'' & b''+c'' & c''+a'' \end{vmatrix} = \{C_1 = C_1 - C_2 + C_3\} = \begin{vmatrix} 2a & b+c & c+a\\ 2a' & b'+c' & c'+a'\\ 2a'' & b''+c'' & c''+a'' \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} a & b+c & c+a\\ a' & b'+c' & c'+a'\\ a'' & b''+c'' & c''+a'' \end{vmatrix} = \{C_3 = C_3 - C_1\} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & b+c & c\\ a' & b'+c' & c'\\ a'' & b''+c'' & c'' \end{vmatrix} = \{C_2 = C_2 - C_3\} = 2\cdot\begin{vmatrix} a&b&c\\ a'&b'&c'\\ a''&b''&c'' \end{vmatrix}$$

25. (3 puntos) Determinar la raíz múltiple de la ecuación $\begin{vmatrix} x&1&8&1\\ 1&x&1&8\\ 8&1&x&1\\ 1&8&1&x \end{vmatrix} = 0$

Solución.

$$\begin{vmatrix} x&1&8&1\\ 1&x&1&8\\ 8&1&x&1\\ 1&8&1&x \end{vmatrix} = \{F_4 = F_4 + F_3 + F_2 + F_1\} = \begin{vmatrix} x&1&8&1\\ 1&x&1&8\\ 8&1&x&1\\ x+10&x+10&x+10&x+10 \end{vmatrix}$$ = sacando factor común de (x + 10) en la fila $= (x+10)\cdot\begin{vmatrix} x&1&8&1\\ 1&x&1&8\\ 8&1&x&1\\ 1&1&1&1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1=C_1-C_4\\ C_2=C_2-C_4\\ C_3=C_3-C_4 \end{Bmatrix} = (x+10)\cdot\begin{vmatrix} x-1&0&7&1\\ -7&x-8&-7&8\\ 7&0&x-1&1\\ 0&0&0&1 \end{vmatrix} =$

$$= (x+10)\cdot(-1)^{4+4}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} x-1&0&7\\ -7&x-8&-7\\ 7&0&x-1 \end{vmatrix} = (x+10)\cdot(x-8)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} x-1&7\\ 7&x-1 \end{vmatrix} =$$

$$(x+10)\cdot(x-8)\cdot\left[(x-1)^2-49\right] = (x+10)\cdot(x-8)\cdot\left((x-1)^2-7^2\right) = (x+10)\cdot(x-8)\cdot[(x-1)-7]\cdot[(x-1)+7] =$$

$$= (x+10)\cdot(x-8)\cdot(x-8)\cdot(x+6) = (x+10)\cdot(x-8)^2\cdot(x+6)$$

La raíz múltiple es x = 8