DETERMINANTES

Todas las matrices cuadradas tienen determinante. El determinante de una matriz determina si los elementos de está tienen o no solución única. Un determinante de una matriz de orden n se obtiene mediante el sumatorio de n! productos formados cada uno de ellos por las permutaciones n elementos, uno por fila y columna, pero sin que en la misma permutación halla dos elementos que pertenezcan a la vez a la misma línea (fila o columna).

Cálculo.

Determinante de orden dos.

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} \\ a_{2.1} & a_{2.2} \end{vmatrix} = a_{1.1} \cdot a_{2.2} - a_{1.2} \cdot a_{2.1}$$

Determinante de orden tres. Regla de SARRUS

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} = a_{1.1} \cdot a_{2.2} \cdot a_{3.3} + a_{1.2} \cdot a_{2.3} \cdot a_{3.1} + a_{1.3} \cdot a_{2.1} \cdot a_{3.2} -$$

$$-\left(a_{1.3} \cdot a_{2.2} \cdot a_{3.1} + a_{1.2} \cdot a_{2.1} \cdot a_{3.3} + a_{1.1} \cdot a_{2.3} \cdot a_{3.2}\right)$$

que corresponde al producto de las 6 (3! = 6) permutaciones posibles tres positiva y tres negativas, viniendo el signo de cada permutación determinado por el número de inversiones de la permutación respecto del orden natural.

Existen diversos métodos para recordar el cálculo de determinantes de orden tres, uno de los más sencillos se basa en repetir las dos primeras filas del determinante debajo de él, generándose 6 diagonales, tres descendentes (positivas) y tres ascendente negativas.

$$\begin{array}{ccc|l} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & -a_{3.1} \cdot a_{2.2} \cdot a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & -a_{1.1} \cdot a_{3.2} \cdot a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & -a_{2.1} \cdot a_{1.2} \cdot a_{3.3} \\ a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & +a_{1.1} \cdot a_{2.2} \cdot a_{3.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & +a_{2.1} \cdot a_{3.2} \cdot a_{1.3} \\ & & & +a_{3.1} \cdot a_{2.3} \cdot a_{1.2} \end{array}$$

Menor de una matriz.

Si en una matriz seleccionamos r filas y r columnas, los elementos en los que se cruzan forman una submatriz cuadrada de orden r. Al determinante de esa submatriz cuadrada se llama menor de orden r de la matriz inicial

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.4} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & a_{2.4} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & a_{3.4} \\ a_{4.1} & a_{4.2} & a_{4.3} & a_{4.4} \end{pmatrix} \text{seleccionando } F_1, F_2, F_4, C_2, C_3, C_4 : \begin{vmatrix} a_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.4} \\ a_{2.2} & a_{2.3} & a_{2.4} \\ a_{4.2} & a_{4.3} & a_{4.4} \end{vmatrix}, \text{ menor de orden 3}$$

En una matriz existirán menores desde orden 1, cada uno de los elementos de la matriz es un menor de orden 1, hasta menores de orden la menor de las dimensiones de la matriz.

Menor orlado de orden n es un menor de orden n+1 que contiene al menor de orden n. En la matriz $\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.4} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & a_{2.4} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & a_{3.4} \end{pmatrix}$ los menores orlados del menor $\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} \\ a_{2.1} & a_{2.2} \end{vmatrix}$, son los menores

$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.4} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.4} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.4} \end{vmatrix}$, ya que son los únicos menores de orden tres que contienen al menor de orden 2.

Menor complementario.

Se denomina menor complementario de una matriz cuadrada n×n, al valor del determinante de orden n−1 que se obtiene cuando se elimina la fila i y la columna j, designándose por $\alpha_{i.j}$.

Adjunto.

Se llama adjunto del elemento $a_{i.j}$ al número $A_{i.j} = (-1)^{i+j}\alpha_{i.j}$

A la matriz formada por todos los adjuntos de una matriz n×n se la denomina matriz adjunta y se la designa como Adj A.

Propiedades.

i. El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $|A| = |A^t|$

ii. Si una matriz cuadrada tiene una línea (fila o columna) de ceros, su determinante es cero.

iii. Si permutamos dos líneas paralelas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} = \{F_1 \leftrightarrow F_2\} = -\begin{vmatrix} a_{2.1} & a_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} = \{C_1 \leftrightarrow C_2\} = +\begin{vmatrix} a_{2.2} & a_{2.1} & a_{3.2} \\ a_{2.1} & a_{1.1} & a_{3.1} \\ a_{3.2} & a_{3.1} & a_{3.3} \end{vmatrix}$$

iv. Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante es cero.

v. Si multiplicamos por el mismo número todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada, su determinante queda multiplicado por ese número.

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ k\cdot a_{2.1} & k\cdot a_{2.2} & k\cdot a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix}$$

vi. Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es cero.

vii. $\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1}+b_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{2.1} & a_{2.2}+b_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2}+b_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1.1} & b_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{2.1} & b_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{3.1} & b_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix}$. Está descomposición es válida cualquiera que sea la fila o la columna en la que se hallen los sumandos.

viii. Si a una línea de una matriz le sumamos una combinación lineal de las paralelas, su determinante no varia.

ix. Si una matriz tiene una línea que es combinación lineal de las demás paralelas, entonces su determinante es cero, ya que se podría descomponer en suma de varios determinantes, cada uno de los cuales tendrían dos líneas proporcionales.

x. $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

xi. Si los elementos de una línea (fila ó columna) de una matriz cuadrada se multiplican por sus respectivos adjuntos y se suman los resultados se obtiene el determinante de la matriz inicial. A está técnica se la denomina desarrollo del determinante por los elementos de una línea (fila o columna).

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.4} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & a_{2.4} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & a_{3.4} \\ a_{4.1} & a_{4.2} & a_{4.3} & a_{4.4} \end{vmatrix} = a_{2.1}\cdot A_{2.1} + a_{2.2}\cdot A_{2.2} + a_{2.3}\cdot A_{2.3} + a_{2.4}\cdot A_{2.4}$$

xii. Si los elementos de una línea (fila ó columna) de una matriz cuadrada se multiplican por los respectivos adjuntos de una paralela, el resultado de la suma es cero.

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.4} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & a_{2.4} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & a_{3.4} \\ a_{4.1} & a_{4.2} & a_{4.3} & a_{4.4} \end{vmatrix} = a_{2.1} \cdot A_{3.1} + a_{2.2} \cdot A_{3.2} + a_{2.3} \cdot A_{3.3} + a_{2.4} \cdot A_{3.4} = 0$$

Determinantes de orden superior.

Se desarrollan aplicando la propiedad xi, de tal forma que un determinante de orden n se transforma en n determinantes de orden n–1. Para simplificar el cálculo conviene hacer ceros todos los términos de la línea (fila o columna) excepto uno, aplicando la propiedad vii., de está forma el determinante de orden n se transforma en un único determinante de orden n–1.

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.4} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & a_{2.4} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & a_{3.4} \\ a_{4.1} & a_{4.2} & a_{4.3} & a_{4.4} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{PROP. VII}} \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.4} \\ 0 & 0 & a_{2.3} & 0 \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & a_{3.4} \\ a_{4.1} & a_{4.2} & a_{4.3} & a_{4.4} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.4} \\ 0 & 0 & a_{2.3} & 0 \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & a_{3.4} \\ a_{4.1} & a_{4.2} & a_{4.3} & a_{4.4} \end{vmatrix} = a_{2.3} \cdot A_{2.3} = a_{2.3} \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.4} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.4} \\ a_{4.1} & a_{4.2} & a_{4.4} \end{vmatrix} = -a_{2.3} \cdot \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.4} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.4} \\ a_{4.1} & a_{4.2} & a_{4.4} \end{vmatrix}$$